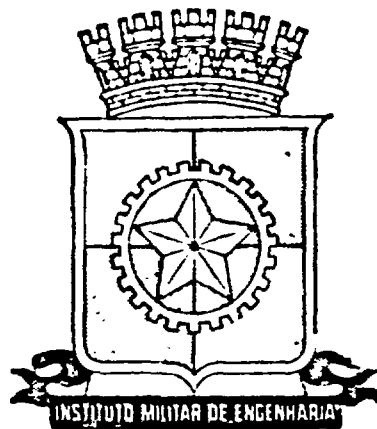


INIS-128--7227

MINISTÉRIO DO EXÉRCITO  
DEP CTE<sub>x</sub>



TESE DE MESTRADO

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO  
DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE  
CALOR BI - DIMENSIONAL

Rubens Souza dos Santos

IME

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO  
DE CONDUÇÃO DE CALOR BI-DIMENSIONAL

POR

RUBENS SOUZA DOS SANTOS

TESE SUBMETIDA  
COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA NUCLEAR

Assinatura do Orientador da Tese

  
ANTONIO CARLOS MARQUES ALVIM

Rio de Janeiro, RJ

Setembro, 1981

A

Eliana

## AGRADECIMENTO

À Seção de Energia Nuclear do Instituto Militar de Engenharia pela formação científica adquirida.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear em especial ao PRONUCLEAR pela bolsa concedida.

Ao Instituto Militar de Engenharia Nuclear, e a to dos os seus funcionários que contribuíram para a realização deste trabalho.

Em especial, ao Dr. Antonio Carlos Marques Alvim , meu orientador e amigo, pelo dedicado trabalho de assistência, estímulo e eficiente orientação dispensada durante o desenvolvimento deste trabalho, bem como seu otimismo em to dos os momentos.

Ao Dr. David Adjuto Botelho, pela sua amizade e apoio, participação e cooperação durante o decorrer deste trabalho.

Ao Dr. Antonio Carlos de Oliveira Barroso pelas sugestões e pela participação como membro da banca examinadora.

Ao M.Sc. Maj Carlos Alberto Reinert de Lima pelas sugestões e participação como membro da banca examinadora.

Às senhoritas Marilhia e M.Sc. Elizabeth F. Sato pela valiosa colaboração na apresentação desse trabalho.

Aos meus colegas de Curso Adriano, Cabral, Eduardo, Karam, Nuno, Rejane, Romero e Ronaldo.

De modo muito especial, o encorajamento e paciência de minha esposa e família as quais fizeram com que o período transcorrido até o término desse trabalho fosse a gradável.

A todos enfim, que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e cujos nomes injustamente omito.

## SUMÁRIO

Uma classe de métodos numéricos, chamados "Algoritmos Hopscotch", foi usado para resolver a equação de condução de calor em geometria cilíndrica.

Utilizando-se uma fonte de calor, com dependência temporal, procurou-se verificar o comportamento de uma vareta cilíndrica.

Com os valores das temperaturas, analisou-se a estabilidade e convergência de cada método durante os transitórios.

Num outro teste especificou-se a temperatura sobre a superfície como condição de contorno.

~~Foi observado~~ <sup>observou-se</sup> que os diversos métodos Hopscotch analisados mostraram diferentes graus de precisão, sendo alguns tão precisos quanto o método ADE, no entanto necessitando mais operações computacionais do que o método ADE.

Finalmente, comparando-se o tempo de computação, o método ODD-EVEN mostrou-se mais rápido que os outros dois métodos Hopscotch. (autor)

## ABSTRACT

A class of numerical methods, called "Hopscotch Algorithms", was used to solve the heat conduction equation in cylindrical geometry.

Using a time dependent heat source, the temperature versus time behavior of cylindric rod was analysed.

Numerical simulation was used to study the stability and the convergence of each different method.

Another test had the temperature specified on the outer surface as boundary condition.

~~It was observed that~~ The various Hopscotch methods analysed exhibit differing degrees of accuracy, few of them being so accurate as the ADE method, but requiring more computational operations than the later, were observed.

Finally, compared with the so called ODD-EVEN method, two other Hopscotch methods, are more time consuming.  
(author)

## ÍNDICE

SUMÁRIO	IV
ABSTRACT	V
LISTA DE TABELAS	IX
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	XI
NOMENCLATURAS	XIV
I - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Revisão Bibliográfica	1
1.2 - Trabalho Proposto	7
II - DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO	8
2.1 - Formulação do Problema	8
2.2 - Discretização por Diferenças Finitas	8
2.3 - Formulação Matricial	10
III - DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL	13
3.1 - Solução Temporal Analítica	13
3.2 - Aproximações Clássicas	14
3.3 - Método ADI	16
3.4 - Método ADE	16
3.5 - Métodos HOPSCOTCH	16
3.5.1 - Introdução	16
3.5.2 - Método ODD-EVEN	17
3.5.3 - Método LINE	23
3.5.4 - Método ADI-HOPSCOTCH	26
3.5.5 - Natureza "MATRIX SPLITTING dos Métodos HOPSCOTCH"	28



IV - APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS	31
4.1 - Formulação do Problema de Condução do Calor	31
4.2 - Equação de Condução do Calor Discretizada em Espaço	32
4.3 - Solução Estacionária	32
4.4 - Solução Temporal	33
4.4.1 - Introdução	33
4.4.2 - Solução ADI	33
4.4.3 - Solução ADE	34
4.4.4 - Solução ODD-EVEN	35
4.4.5 - Solução LINE	36
4.4.6 - Solução ADI-HOPSCOTCH	37
V - RESULTADOS	39
5.1 - Introdução	
5.2 - Comportamento de uma Vareta	39
5.2.1 - Descrição dos Testes	40
5.2.2 - Parâmetros Físicos e Geométricos da Vareta	40
5.2.3 - Fonte em Rampa	40
5.2.4 - Fonte em Degrau	42
5.2.5 - Fonte em Decaimento	42
5.2.6 - Convergência dos Métodos	43
5.3 - Comportamento de um Cilindro	43
5.4 - Conclusões	44
APÊNDICE A - CONCEITOS DE CONVERGÊNCIA, ESTABILIDADE E CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA	78

APÊNDICE B	-	DESCRIÇÃO DO MÉTODO ADI	81
APÊNDICE C	-	DESCRIÇÃO DO MÉTODO ADE	85
APÊNDICE D	-	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR	87
APÊNDICE E	-	SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR	105
BIBLIOGRAFIA			108

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	:	Parâmetros físicos e geométricos da vareta.....	48
TABELA 2	:	Erro percentual com o tempo, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.....	49
TABELA 3	:	Erro percentual com o tempo, teste da fonte em rampa a partir de valor inicial.....	50
TABELA 4	:	Erro percentual com o tempo, teste da fonte em degrau.....	51
TABELA 5	:	Erro percentual com o tempo, teste da fonte em decaimento.....	52
TABELA 6	:	Parâmetros físicos e geométricos do cilindro.....	53
TABELA 7	:	Temperatura ( $^{\circ}\text{F}$ ) com o tempo, método do ADE, teste do cilindro.....	54
TABELA 8	:	Temperatura ( $^{\circ}\text{F}$ ) com o tempo, método ODD-EVEN, teste do cilindro.....	55

TABELA 9 : Temperatura ( <sup>o</sup> F) com o tempo,método LINE, teste do cilindro.....	56
---	----

TABELA 10 : Temperatura ( <sup>o</sup> F) com o tempo,método ADI-HOPSCOTCH, teste do cilíndrico.	57
---	----

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	: Malha bidimensional.....	11
Figura 2	: Malha espacial em geometria cilíndrica.	12
Figura 3	: Detalhe da malha espacial de acordo com o método ODD-EVEN.....	22
Figura 4	: Malha espacial dos métodos das linhas alternadas.....	24
Figura 5	: Erro do método ODD-EVEN, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo...	58
Figura 6	: Erro do método LINE, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.....	59
Figura 7	: Erro do método ADI-HOPSCOTCH, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.....	60
Figura 8	: Variação da temperatura com o tempo para cada método, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.....	61

Figura 9	: Erro do método LINE, teste da fonte em rampa a partir de uma distribuição inicial de temperatura.....	62
Figura 10	: Variação da temperatura com o tempo para cada método, teste da fonte em rampa a partir de uma distribuição inicial de temperatura.....	63
Figura 11	: Erro do método ODD-EVEN, teste da fonte em degrau.....	64
Figura 12	: Erro do método ADI-HOPSCOTCH, teste da fonte em degrau.....	65
Figura 13	: Variação da temperatura com o tempo, teste da fonte em degrau.....	66
Figura 14	: Erro do método ODD-EVEN, fonte em decaimento.....	67
Figura 15	: Erro do método ADI-HOPSCOTCH, fonte em decaimento.....	68
Figura 16	: Variação da temperatura com o tempo, fonte em decaimento.....	69
Figura 17	: Convergência dos métodos HOPSCOTCH.	70

Figura 18	: Variação da temperatura com o tempo, método ODD-EVEN, teste do cilindro.	71
Figura 19	: Variação da temperatura com o tempo, método LINE, teste do cilindro.....	72
Figura 20	: Variação da temperatura com o tempo, método ADI-HOPSCOTCH, teste do cilí <u>n</u> dro.....	73
Figura 21	: Variação da temperatura com o tempo, método ADE, em vários pontos, teste do cilindro.....	74
Figura 22	: Variação da temperatura com o tempo, método ODD-EVEN, em vários pontos , teste do cilindro.....	75
Figura 23	: Variação da temperatura com o tempo, método LINE, em vários pontos, tes- te do cilindro.....	76
Figura 24	: Variação da temperatura com o tempo, método ADI-HOPSCOTCH, em vários pon <u>t</u> tos, teste do cilindro.....	77
Figura 25	: Detalhes dos volumes de controles nos contornos.....	94

## NOMENCLATURA

- A - área,  $\text{ft}^2$
- $\underline{\underline{A}}$  - matriz
- $C_k$  - constante
- F - função associada ao balanço de energia num contorno de um volume.
- G - grandeza associada à equação de difusão
- h - coeficiente de transferência de calor por convecção,  $\text{Btu/hr.ft}^2.^{\circ}\text{F}$ .
- K - condutividade térmica,  $\text{Btu/hr.ft.}^{\circ}\text{F}$ .
- q - taxa de produção de calor,  $\text{Btu/hr}$ .
- q - taxa de produção de calor por unidade de volume,  $\text{Btu/hr.ft}^3$ .
- R - raio do cilindro , ft.
- r - distância radial, ft.



$\vec{r}$	-	vetor posição
S	-	segundo
$\underline{S}$	-	vetor coluna associado com a fonte
T	-	temperatura °F
$T_f$	-	temperatura do fluido
t	-	tempo, segundo
z	-	distância axial, ft

## LETRA GREGA

- $\alpha$  - coeficientes das temperaturas dependentes do tempo
- $\beta$  - coeficiente das temperaturas no estacionário
- $\rho$  - massa específica,  $\text{lbm/ft}^3$
- $\epsilon$  - erro, precisão
- $\eta$  - normal a superfície
- $\Delta$  - operador diferença
- $\nabla$  - operador nabla

## SUBSCRITOS

- i - refere-se a posição radial ou ao fluído inferior
- j - refere-se à posição axial
- $\ell$  - refere-se à lateral da vareta ou linha de matriz
- n - nível de tempo
- s - refere-se ao fluído superior

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - Revisão Bibliográfica

Com o advento dos reatores nucleares a análise espacial de fenômenos de difusão tornou-se importante devido as altas taxas de transferência de energia envolvidas. Além do mais, as taxas de variações temporais de grandezas tais como o fluxo de neutrons e a temperatura são bastante acentuadas, de tal forma que durante transitórios, observações em torno dessas grandezas durante certo intervalo de tempo tornam-se necessárias. Esse detalhamento espacial e temporal na análise dessas grandezas é necessário visto que certas propriedades materiais são afetadas a partir de certos valores críticos. Logo, a partir da análise espacial e temporal de tais grandezas nucleares pode-se prever, com algumas aproximações, o comportamento espacial e temporal de um reator nuclear quando submetido a diversas situações.

A equação de difusão simplificada fica<sup>1,2</sup>

$$C_1 \frac{\partial G}{\partial t} = \nabla \cdot C_2 \nabla G + f, \quad (1)$$

onde

$G$  = grandeza escalar tal como fluxo de neutrons ,

fluxo de raios gama ou temperatura

$C_1, C_2$  = parâmetros dependentes do tipo de fenômeno

$f$  = termo de geração associada à grandeza

$\nabla$  = operador nabla

$t$  = tempo

As condições de contorno para a equação (1), quando observamos o volume de controle contornado por uma superfície  $j$ , é dado por :

$$C_{3j} \frac{\partial G}{\partial \eta_j} + C_{4j} G = C_5 F_j \quad (2)$$

onde  $\partial/\partial \eta_j$  denota diferenciação ao longo de uma normal à superfície de contorno  $j$  e

$$F_j = F_j(\vec{r}, G, t) \quad (3)$$

é uma função que descreve a geração e o armazenamento de  $G$ , num volume contornado por uma superfície  $j$ , onde  $\vec{r}$  representa o vetor posição do ponto onde observamos a grandeza  $G$ .

Observando a dependência da grandeza  $G$  com  $\vec{r}$ ,  $t$  ou outras variáveis, tal como o ângulo sólido  $\Omega$ , no caso do fluxo de neutrons, há também a possibilidade de  $C_1$  e  $C_2$  dependerem também de  $G$  de  $\vec{r}$  e  $t$ , o que torna a resolução analítica da equação (1) pelas técnicas usuais extremamente

te difícil. A dificuldade aumenta quando o problema é multidimensional. Mesmo após diversas aproximações e para geometria simples, quando uma solução em séries é encontrada, a avaliação numérica da solução muitas vezes é dificultada, pois a convergência é atingida somente quando se utilizam muitos termos. Devido as limitações impostas sobre métodos analíticos, a alternativa na resolução da equação (1) é o uso dos métodos numéricos.

Os métodos numéricos usuais são os esquemas que se baseiam na substituição das derivadas por expressões de diferenças finitas<sup>1,2,3,7,12</sup>, a utilização de elementos finitos<sup>12</sup>, ou os métodos de Monte Carlo<sup>1,2</sup>, baseado na teoria das probabilidades. Informações e descrições mais detalhadas sobre os métodos de elementos finitos e de Monte Carlo são encontradas nas referências citadas anteriormente, enquanto que a solução numérica por diferenças finita será objeto de nosso estudo.

Ao se aplicar o método de diferenças finitas à equação (1), o problema recai na resolução de um sistema de equações algébricas, que hoje em dia tornou-se uma tarefa relativamente rápida e eficiente, com o uso dos computadores digitais. Os problemas relativos à não linearidade da equação (1), a presença de meio não homogêneo ou a existência de um termo de fonte tornam-se simples, pois as equações são resolvidas para cada ponto do volume, sendo que esses pontos estão separados por distâncias fixas formando

uma malha. Os tempos de observação agora não são mais con  
tínuos, mas substituídos por intervalos de tempo de largu  
ra constante.

Por outro lado a substituição das derivadas, tanto  
espacial quanto temporal, por expressões de diferença fini  
ta fará com que a solução numérica esteja afastada da soluç  
ção verdadeira do problema por uma quantidade  $\epsilon$ .

Dividimos o volume de controle em malhas retangular  
es, supondo o problema bidimensional, como ilustra a Figur  
a 1.

e com

$$\vec{r} = (i \Delta r_1, j \Delta r_2) ; i, j = 0, 1, 2, \dots, NPI \quad (4)$$

$$t = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

onde NPI 1 e 2 são os números de pontos internos em cada  
uma das direções. A solução de (1) é dado por  $G(\vec{r}, t)$  e a  
solução numérica da equação de diferenças é representada  
por  $G_{i,j}^n$ . Dessa forma

$$\epsilon = G_{i,j}^n - G(\vec{r}, t) \quad (6)$$

Na equação (6) a quantidade  $\epsilon$  é o erro devido a aproximação de se tomar  $G_{i,j}^n$  por  $G(\vec{r},t)$  no ponto  $(i,j,n)$ . O erro  $\epsilon$  é a soma de erros devidos a diversas procedências. Sabemos que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \quad (7)$$

Dessa forma poderemos utilizar as equações (7) para aproximar as derivadas na equação (1). Nessas aproximações alguns termos da série são truncados na representação das derivadas, por exemplo :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h) \quad (8)$$

ve-se que  $f'(x)$  foi representada por uma expressão de diferença, a menos de um termo da ordem de  $h$ . Com isso, quando  $h$  diminuir, os termos restantes de ordem superior tendem a zero e o termo  $o(h)$  é o que mais influenciará na aproximação (8). O truncamento dos outros termos representará uma componente de erro na solução numérica da equação diferencial. Por outro lado quando os cálculos são processados no computador, devido ao número finito na representação dos dígitos, alguns resultados são arredondados randomicamente, surgindo daí o erro de arredondamento. Porém sendo o erro de arredondamento um processo randômico, pode haver cancelamento e no fim seu efeito se torne desprezível. Dessa for

ma, a componente maior na formação do erro  $\epsilon$  é devido ao truncamento na equação (8), ou seja na forma pela qual as derivadas são aproximadas.

Na prática, procura-se observar dois pontos de vista no comportamento do erro. Primeiro espera-se que  $|\epsilon|$  seja limitado ao fixarmos  $\Delta r_1, \Delta r_2$  e  $\Delta t$  e fazemos  $t$  aumentar indefinidamente. Obedecido tal comportamento, diz-se que o esquema de diferença finitas é estável, isto é, na medida em que o tempo passa, o erro não é amplificado de tal forma que a solução se afaste da solução exata. No caso contrário diz que o esquema é instável. No segundo, fixa-se o tempo  $t$  e faz-se  $\Delta r_1, \Delta r_2$  ou  $\Delta t$  ou ambos, aproximarem de zero : Espera-se que  $|\epsilon|$  aproxime-se também de zero. Dessa forma estará garantido que a solução numérica convergirá para a solução verdadeira. Nesse caso diz-se que o esquema é convergente. Caso contrário, o esquema é não convergente.

Na realidade, o conhecimento das condições de estabilidade e convergência para um determinado esquema de aproximação por diferenças finitas é bastante difícil, a menos de alguns problemas possuindo geometria e condições de contorno simples. Conceitos de convergência, estabilidade e condições de consistência são discutidos no Apêndice A, quando aplicado à equação simples. Pelo teorema de Lax<sup>7</sup> tira-se que "para um esquema de diferenças finitas consistente com a equação diferencial, a condição necessária e suficiente para que o esquema seja convergente é que ele seja es



tável". Porém, provar consistência e estabilidade, teoricamente, dos métodos que serão investigados nesse estudo é tarefa bastante difícil quando tratamos de problemas multidimensionais, com geometria e condições de contorno complexas. Diversas referências que tratam do assunto são citadas no texto.

## 1.2 - Trabalho Proposto

Nesse trabalho serão investigadas diversas classes de métodos de diferenças finitas, tomando como aplicação a resolução da equação (1) quando usada para representar a geração e/ou condução de calor em geometria cilíndrica com simetria axial. Assumiremos as condições de contornos de transferência de calor por convecção do longo das superfícies da vareta, ou temperatura no contorno fixa.

Será escolhido um método padrão de tal forma que esse represente a melhor solução do problema. Escolhido o método padrão, procurar-se-á analisar do ponto de vista prático, ou seja, as precisões dos métodos, condições de estabilidade e convergência<sup>7</sup>, comparando-se com o método padrão. Por fim, serão selecionados os métodos mais eficientes e precisos para se avaliar as faixas de atuações desses métodos selecionados.

## CAPÍTULO II

### DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

#### 2.1 - Formulação do Problema

Na discretização espacial da equação (1), por simplicidade, consideraremos difusão da grandeza  $G$  a duas dimensões num meio uniforme e com as variáveis  $C_k$  independentes da grandeza  $G$ , a fonte  $f$  uniforme em todo o volume de controle, mas com a possibilidade de variar com o tempo.

#### 2.2 - Discretização por Diferenças Finitas

Considere-se uma malha com espaçamento constantes de tal forma que :

$$r_{1i} = i \Delta r_1 \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, \text{NPR}_1$$

$$r_{2j} = j \Delta r_2 \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, \text{NPR}_2$$

conforme ilustra a Figura 2.

A aproximação da equação (1) por diferenças finitas, para espaçamento constante e meio homogêneo, pode ser obtida diretamente pela aproximação das derivadas parciais por diferenças. Em casos mais gerais, i . e . , com espaçamentos não uniformes e/ou propriedades materiais dependentes de posição, o conhecido processo de "box integration"<sup>13</sup>

deve ser utilizado. Entretanto, este processo, para o problema homogêneo em consideração, conduz ao mesmo resultado que iremos obter diretamente :

Representando o operador  $\nabla C_2 \nabla$  por  $C_1 \hat{H}$  na equação (1) teremos :

$$C_1 \frac{\partial G}{\partial t} = C_1 \hat{H}G + f ,$$

e daí

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \hat{H}G + \frac{f}{C_1} \quad (9)$$

onde  $\hat{H}$  é o operador difusão, responsável pela ligação da grandeza  $G$  com seus vizinhos mais próximos. Com a discretização espacial do operador  $\hat{H}$ , num ponto genérico  $(i,j)$  teremos

$$\frac{d G_{i,j}}{dt} = H G_{i,j} + \frac{f_{i,j}}{C_1} \quad (10)$$

onde  $H$  é o operador discretizado. A discretização nos contornos do volume é obtida a partir de escolha de volumes de controle escolhidos convenientemente onde se aplica balanço de energia. Dessa forma, a equação de difusão definida no início fica totalmente discretizada no espaço, mas não ainda no tempo.

### 2.3 - Formulação Matricial

Notando que

$$\begin{aligned} HG_{i,j} = & a_{i,j-1} G_{i,j-1} + a_{i-1,j} G_{i-1,j} + \\ & a_{i,j} G_{i,j} + a_{i+1,j} G_{i+1,j} + a_{i,j} + G_{i,j+1} \end{aligned} \quad (11)$$

e fazendo

$$\underline{G} = \text{Col } \{G_{11}, G_{21}, \dots, G_{12}, \dots, G_{NPR1, NPR2}\} \quad (12)$$

$$\underline{S} = \text{Col } \{f_{11}, f_{21}, \dots, f_{12}, \dots, f_{NPR1, NPR2}\} / C_1, \quad (13)$$

observando ainda que o lado direito da equação (11) possui uma estrutura de matriz, lançando mão desse fato e usando as equações (12) e (13) teremos :

$$\frac{dG}{dt} = \underline{\underline{A}} \underline{G} + \underline{S} \quad (14)$$

onde  $\underline{\underline{A}}$  é a matriz formada pelos coeficientes dos  $G_{i,j}$  em (11) e contém cinco diagonais do tipo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \diagup \\ \hline \diagup \\ \hline \diagup \\ \hline \diagup \\ \hline \end{array}$$

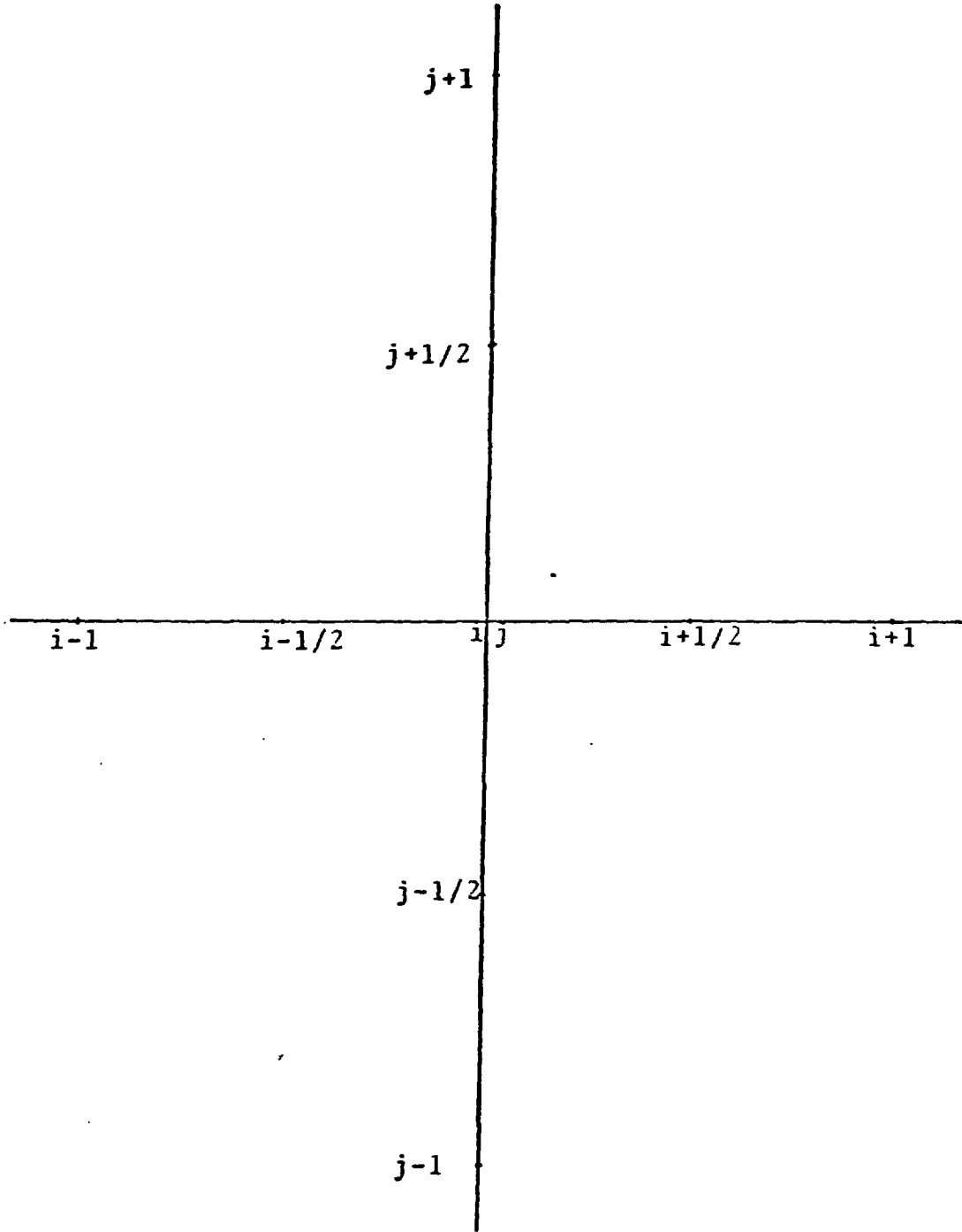


Figura 1 : Malha bidimensional.

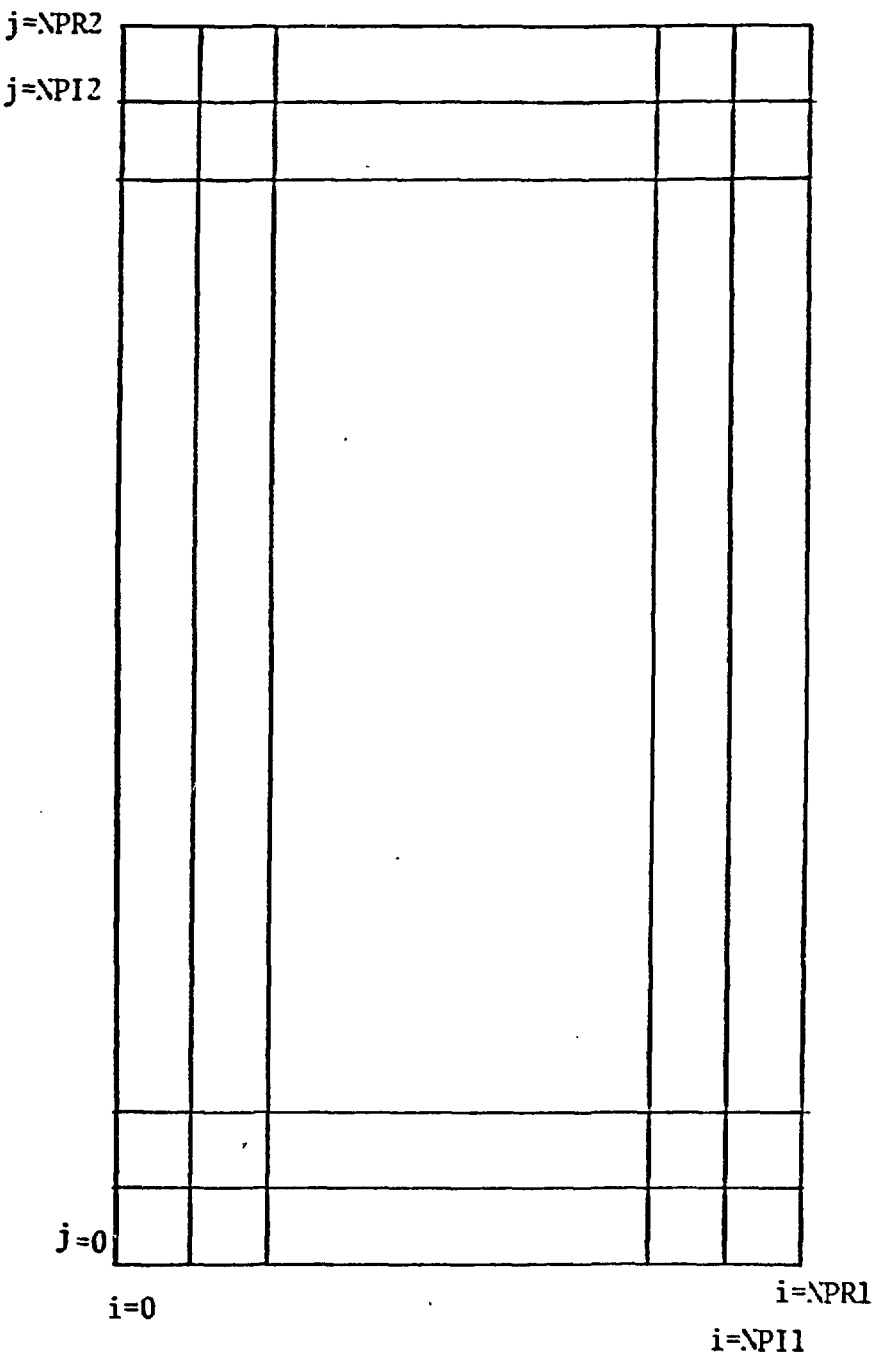


Figura 2 : Malha espacial em geometria cilíndrica.

## CAPÍTULO III

### DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

#### 3.1 - Solução Temporal Analítica

A equação (14) representa um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas. A solução analítica do sistema num tempo  $t + \Delta t$  é dado por<sup>3</sup>

$$\underline{G}(t+\Delta t) = \exp(\Delta t \underline{A}) \underline{G}(t) + [\exp(\Delta t \underline{A}) - \underline{I}] \underline{A}^{-1} \underline{S} \quad (15)$$

onde  $\exp(\Delta t \underline{A})$  é o operador exponencial atuado sobre a matriz  $\Delta t \underline{A}$ , dado por

$$\exp(\Delta t \underline{A}) = \underline{I} + \Delta t \underline{A} + \frac{\Delta t^2}{2!} \underline{A}^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} \underline{A}^3 + \dots, \quad (16)$$

e  $\underline{I}$  é a matriz identidade. Logo, a avaliação do operador exponencial requer, a manipulação de potência de matriz, pois a expansão (16) será convergente para todo  $\Delta t$  quando um número grande de termos são usados. Dessa forma o uso da (16) para obtermos  $\underline{G}(t+\Delta t)$  através da equação (15) torna-se um processo lento além de requerer memória para armazenar a matriz  $\underline{A}$ . Com uso de métodos numéricos usaremos aproximações para a equação (16) de tal forma que as operações necessárias para obtermos (15) sejam relativamente simples.

### 3.2 - Aproximações Clássicas

Relacionando o tempo  $t$  com o nível de tempo  $n$  e o tempo  $t + \Delta t$  com o nível de tempo  $n + 1$ , o esquema numérico mais simples para aproximarmos a equação (15) seria

$$\underline{G}^{n+1} = (\underline{I} + \Delta t \underline{A}) \underline{G}^n + \Delta t \underline{S}^n \quad (17)$$

A equação (17) aproxima a equação (15) somente para termos de primeira ordem, sendo necessário utilizar incrementos de tempo bastante pequenos, o que implicará num maior número de passos para atingir um determinado tempo de observação  $t_1$ . Além do mais, é sabido<sup>12</sup> que esse método se torna instável, a partir de determinado incremento de tempo.

Uma outra aproximação para a equação (15) é :

$$(\underline{I} - \Delta t \underline{A}) \underline{G}^{n+1} = \underline{G}^n + \Delta t \underline{S}^{n+1} \quad (18)$$

Como na equação (17), a equação (18) apresenta precisão da ordem de  $\Delta t$ , pois

$$\underline{G}^{n+1} = (\underline{I} - \Delta t \underline{A})^{-1} \underline{G}^n + \Delta t (\underline{I} - \Delta t \underline{A})^{-1} \underline{S}^{n+1} \quad (19)$$

e

$$(\underline{I} - \Delta t \underline{A})^{-1} = \underline{I} + \Delta t \underline{A} + \Delta t^2 \underline{A}^2 + \Delta t^3 \underline{A}^3 \dots \quad (20)$$



o que fica evidente se substituirmos (20) em (19).

Um algoritmo, devido à Crank-Nicolson é dado por

$$\underline{G}^{n+1} = \left( \underline{I} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A} \right)^{-1} \left( \underline{I} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A} \right) \underline{G}^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \underline{I} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A} \right)^{-1} (\underline{S}^{n+1} + \underline{S}^n) \quad (21)$$

Observe que

$$\left( \underline{I} - \frac{\Delta t}{2} \underline{A} \right)^{-1} \left( \underline{I} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A} \right) = \underline{I} + \Delta t \underline{A} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}^2 + \frac{\Delta t^3}{4} \underline{A}^3 + \dots \quad (22)$$

é uma aproximação de segunda ordem, ou seja, sua precisão é melhor que a dos métodos explícitos e implícitos puro.

A menos do método explícito, os outros dois métodos implícitos envolvem a inversão de matrizes, o que os torna bastante lentos nos casos multidimensionais. Por outro lado, deve ser notado que a matriz  $\underline{A}$  só possui elementos diferentes de zero ao longo das diagonais principal e secundárias. Essa propriedade da matriz  $\underline{A}$  fará com que as inversões de matriz em certas aproximações desapareçam ou, no pior caso, a inversão seja facilitada com o uso de algoritmo mais simples. Esses métodos pertencem à classe dos já consagrados "MATRIX SPLITTING", ou seja, baseado na partição de matrizes. Com uso dos "MATRIX SPLITTING", somente os elementos das diagonais participam na inversão da matriz, ao invés de toda a matriz. Com isso tem-se uma economia de operações algébricas e de memória bem sensível com o uso desses métodos.

Os métodos que serão apresentados nas seções seguintes pertencentes à esta classe.

### 3.3 - Método ADI

A solução numérica da equação (14) pelo método ADI é desenvolvido no Apêndice B, sendo que o algoritmo resultante é da forma

$$(\underline{I} - \Delta t \underline{A}_2) \underline{G}^{n+1} = (\underline{I} + \Delta t \underline{A}_1) \underline{G}^n + \Delta t \underline{S}^n \quad (23)$$

$$(\underline{I} - \Delta t \underline{A}_1) \underline{G}^{n+2} = (\underline{I} + \Delta t \underline{A}_2) \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{S}^{n+2} \quad (24)$$

### 3.4 - Método ADE

Utilizando-se os resultados detalhados no Apêndice C para o método ADE tem-se o algoritmo

$$(\underline{I} + \Delta t \underline{A}_2) \underline{G}^{n+1} = (\underline{I} + \Delta t \underline{A}_1) \underline{G}^n + \Delta t \underline{S}^n \quad (25)$$

$$(\underline{I} - \Delta t \underline{A}_1) \underline{G}^{n+2} = (\underline{I} + \Delta t \underline{A}_2) \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{S}^{n+2} \quad (26)$$

### 3.5 - Métodos HOPSCOTCH

#### 3.5.1 - Introdução

Uma forma de participação da matriz  $\underline{A}$  na equação (14) é obtida ao utilizarmos alguns dos algoritmos devido a Gourlay (et.al.). A idéia surgiu com os trabalhos publicados por Gordon<sup>15</sup> e mais tarde por Gordon e Scala<sup>16,17</sup>. Gourlay<sup>8</sup> propõe resolver as equações (14) alternando os

pontos a serem calculados ao longo da malha num incremento de tempo, trocando os pontos no outro incremento de tempo. Mais tarde Gourlay em colaboração com McGuire<sup>9</sup> extendem a idéia à problemas elípticos e mostram ser possível resolver a equação (1) alternando linhas ao longo de uma direção da malha num incremento de tempo e trocando as linhas no incremento seguinte. Em Gourlay<sup>8</sup>, devido a forma pela qual a malha é varrida assemelhar-se com um jogo praticado na Escócia, os algoritmos são denominados de "MÉTODOS HOPSCOTCH".

Gourlay<sup>8</sup> prova teóricamente a convergência e estabilidade dos métodos HOPSCOTCH. Alguns resultados numéricos sobre a convergência e estabilidade dos métodos são apresentados nas referências (8) e (9).

### 3.5.2 - Método ODD - EVEN

O método consiste em resolver a equação (14) para os pontos (i,j) da malha relacionados com o nível de tempo n de tal forma a termos i+j+n um número ímpar ou par, conforme será visto.

Definindo uma matriz diagonal  $\underline{I}_1$ , como

$$\underline{I}_1 = \text{diag} \{0,1,0,1,0,1,0,1,\dots\} \quad , \quad (27)$$

e  $\underline{I}_2$  dado por

$$\underline{\underline{I}}_2 = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}}_1. \quad (28)$$

Note que quando  $i+j$  for ímpar o elemento de  $\underline{\underline{I}}_1$  nesse ponto é a unidade, e o elemento de  $\underline{\underline{I}}_2$  é nulo, de acordo com (28). Dessa forma, ao multiplicar o vetor  $\underline{\underline{G}}$  pela matriz  $\underline{\underline{I}}_1$  somente elementos associados à unidade existirão. Nesse caso tem-se as componentes de  $\underline{\underline{G}}$  para pontos alternados da malha. Para evidenciar os outros pontos basta multiplicar  $\underline{\underline{G}}$  por  $\underline{\underline{I}}_2$ .

Se num primeiro estágio, multiplicamos à esquerda a equação (14) por  $\underline{\underline{I}}_1$  e aproximamos explicitamente teremos:

$$\underline{\underline{I}}_1 \left( \frac{\underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{G}}^n}{\Delta t} \right) = \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}^n + \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{S}}^n \quad (29)$$

Isso fará com que somente elementos de  $\underline{\underline{G}}^{n+1}$  para os quais  $i+j+n$  for ímpar sejam calculados, ou seja, metade dos pontos da malha. Pondo (29) na forma

$$\underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{G}}^{n+1} = \underline{\underline{I}}_1 \left( \underline{\underline{I}} + \Delta t \underline{\underline{A}} \right) \underline{\underline{G}}^n + \Delta t \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{S}}^n, \quad (30)$$

teremos uma equação explícita usada sempre que se avançar no tempo.

Em um segundo estágio, a outra metade dos pontos é calculada, ou seja, aqueles para os quais  $i+j+n+1$  é ímpar. Para isso multiplicaremos a equação (14) por  $\underline{\underline{I}}_2$ , tomando uma aproximação implícita:

$$\underline{\underline{I}}_2 \left( \frac{\underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{G}}^n}{\Delta t} \right) = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}^{n+1} + \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{S}}^{n+1} \quad (31)$$

ou

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^n + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{S}}^{n+1} \quad (32)$$

Como na equação (30),  $\underline{\underline{I}}_2$  fará com que os pontos da malha que não foram calculados em (30) sejam determinados por (32). Note que apesar da natureza implícita da equação (32), nenhuma inversão de matriz ocorre, visto que os vizinhos espaciais dos pontos em questão na equação (32) já foram calculados por (30).

Substituindo  $\underline{\underline{I}}_1$  por  $\underline{\underline{I}}_2$  em (30) e fazendo  $n$  igual a  $n+1$ , teremos :

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+2} = \underline{\underline{I}}_2 (\underline{\underline{I}} + \Delta t \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{S}}^{n+1}$$

ou

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+2} = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{S}}^{n+1} \quad (33)$$

Subtraindo (32) de (33) fica :

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+2} - \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^n ,$$

ou

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+2} = 2 \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^n \quad (34)$$

Observe que a equação (34) permitiu calcular o vetor  $\underline{\underline{G}}$  num nível de tempo adiante, utilizando uma equação mais simples, (34), ao invés da equação (32), o que se constituiu num ganho em tempo de processamento.

Como a equação (32) varreu toda a malha no nível  $n+1$ , deveremos completar a informação no nível  $n+2$ , isto é, calcular a outra metade dos pontos. Para isso, basta trocarmos  $\underline{\underline{I}}_2$  por  $\underline{\underline{I}}_1$  em (32) e incrementarmos  $n$ . Com isso teremos :

$$\underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{G}}^{n+2} = \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{S}}^{n+2}. \quad (35)$$

A informação nos pontos dados por  $\underline{\underline{I}}_1$ , agora, pode ser calculada no nível  $n+3$  trocando  $\underline{\underline{I}}_2$  por  $\underline{\underline{I}}_1$  em (34), ou seja,

$$\underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{G}}^{n+3} = 2 \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{G}}^{n+2} - \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{G}}^{n+1} \quad (36)$$

Note-se que as matrizes  $\underline{\underline{I}}_1$  e  $\underline{\underline{I}}_2$  são usadas para evidenciar os pontos nos quais a grandeza  $G$  é avaliada. Do ponto de vista de programação esses pontos podem ser con

trolados sem a necessidade do uso das matrizes  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_2$ . Com isso basta montar um algoritmo do tipo

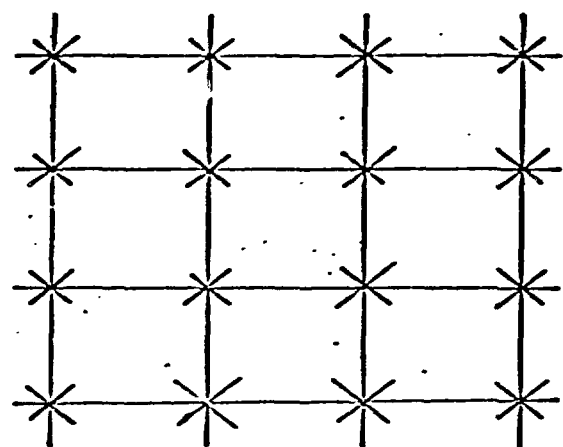
$$\underline{G}^{n+1} = \underline{G}^n + \Delta t \underline{A} \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{S}^{n+1} \quad (37)$$

$$\underline{G}^{n+2} = 2 \underline{G}^{n+1} - \underline{G}^n \quad (38)$$

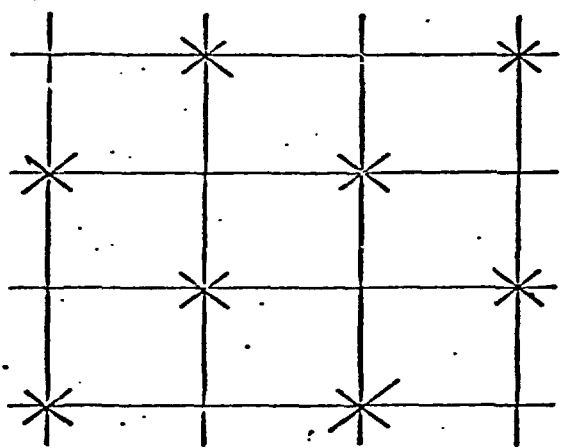
controlando quando  $i+j+n+1$  for ímpar.

Deixe X representar os pontos da malha nos quais  $G_{i,j}$  são avaliadas. Dessa forma a Figura 3a fornece todos os pontos com  $G_{i,j}$  no nível de tempo n, enquanto que as Figuras 3b e 3c mostram os pontos da malha com  $G_{i,j}$  avaliadas nos níveis n+1 e n+2 respectivamente.

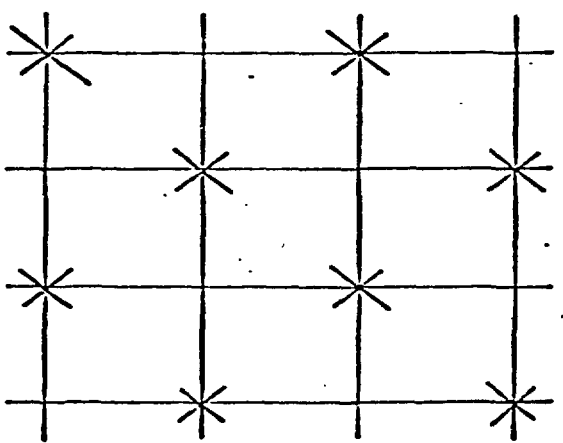
Com o algoritmo anterior temos uma maneira rápida de resolução da equação (14), visto que para cada nível de tempo somente metade dos pontos é calculado. Além do mais as equações (37) são resolvidas ponto a ponto, ou seja, não há necessidade de se inverter nenhuma matriz, já que os vizinhos aos pontos calculados (37) são conhecidos no nível n+1. Visto que a equação (32) avança no tempo, devemos lançar mão de um terceiro estágio para ser usado no momento de imprimir os resultados. Isso deverá ser feito utilizando a equação (37) para calcular a outra metade dos pontos no nível em que se desejar imprimir os resultados.



(A)



(B)



(C)

Figura 3 : Detalhe da malha espacial de acordo com o método ODD-EVEN.



### 3.5.3 - Método LINE

Uma outra forma de percorrermos a malha espacial é proposta por Gourlay e McGuire<sup>9</sup>. É sugerido resolver a equação (14) para linhas alternadas da malha, quando fixamos uma certa direção. Para isso devemos redefinir as matrizes  $\underline{\underline{I}}_1$  e  $\underline{\underline{I}}_2$  de tal forma que

$$\underline{\underline{I}}_1 = \text{diag} \{1,1,1,\dots,1,1,0,0,0,\dots,0,0,1,\dots\} \quad (39)$$

e

$$\underline{\underline{I}}_2 = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}}_1 \quad (40)$$

onde  $\underline{\underline{I}}$  é a matriz identidade. Observe que a matriz  $\underline{\underline{I}}_1$  contém elementos unitários somente para linhas alternadas da malha e  $\underline{\underline{I}}_2$  para as linhas restantes. A Figura 4 mostra a relação dos pontos da malha com os elementos unitários de  $\underline{\underline{I}}_1$  e  $\underline{\underline{I}}_2$ .

Multiplicando a equação (14) por  $\underline{\underline{I}}_1$  à esquerda, com a equação (14) aproximada explicitamente, teremos

$$\underline{\underline{I}}_1 \left( \frac{\underline{G}^{n+1} - \underline{G}^n}{\Delta t} \right) = \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{A}} \underline{G}^n + \underline{\underline{I}}_1 \underline{S}^n \quad (41)$$

ou

$$\underline{\underline{I}}_1 \underline{G}^{n+1} = \underline{\underline{I}}_1 \underline{G}^n + \Delta t \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{A}} \underline{G}^n + \Delta t \underline{\underline{I}}_1 \underline{S}^n. \quad (42)$$

Agora multiplicando à esquerda a equação (14) por

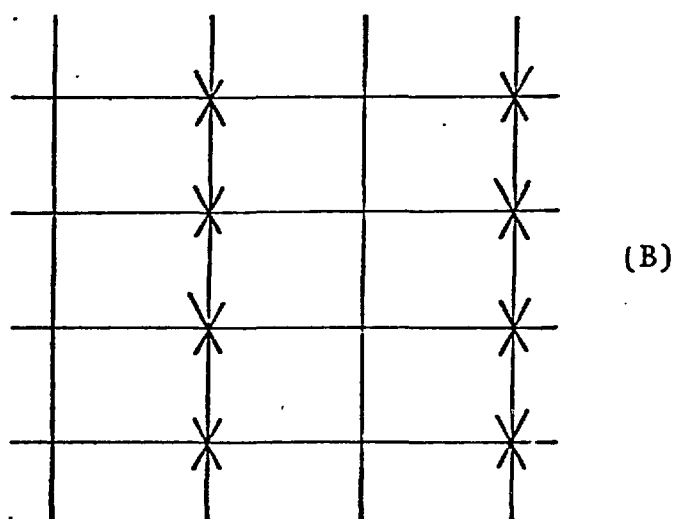
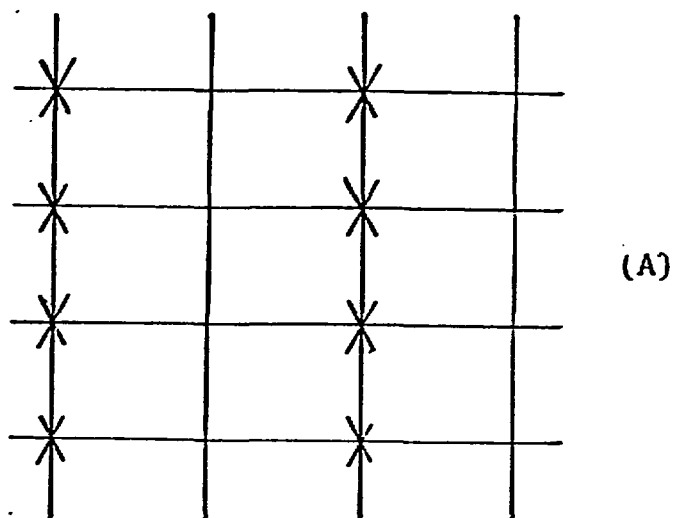


Figura 4 : Malha espacial dos métodos das linhas alternadas. Em (A) os pontos X estão relacionados com os unitários de  $\underline{I}_1$  e em (B) com os unitários de  $\underline{I}_2$ .

$\underline{\underline{I}}_2$  e aproximando (14) implícitamente, fica

$$\underline{\underline{I}}_2 \left( \frac{\underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{G}}^n}{\Delta t} \right) = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}^{n+1} + \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{S}}^{n+1} \quad (43)$$

ou

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} - \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}^{n+1} = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^n + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{S}}^{n+1}. \quad (44)$$

Note-se que somente os elementos ao longo da linha dada por  $\underline{\underline{I}}_2$  serão implícitos, enquanto que os elementos na linha dada por  $\underline{\underline{I}}_1$  são explícitos, visto que a linha dada por  $\underline{\underline{I}}_1$  no nível  $n+1$  já foi calculado por (42). Dessa forma, teremos que inverter as linhas dadas por  $\underline{\underline{I}}_2$ , semelhante as inversões feitas no método ADI, visto que em (44) temos uma matriz tridiagonal no lado esquerdo.

Incrementando  $n$  em (42) e trocando  $\underline{\underline{I}}_1$  por  $\underline{\underline{I}}_2$  teremos :

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+2} = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{S}}^{n+1} \quad (45)$$

Subtraindo (44) de (45) fica

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+2} - \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} = \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^n$$

ou

$$\underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+2} = 2 \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{I}}_2 \underline{\underline{G}}^n \quad (46)$$

dessa forma a equação (46) avança no tempo os elementos da da  
dos por I<sub>2</sub>.

Para prosseguir no tempo, incrementamos n na e  
quação (44) e trocamos I<sub>2</sub> por I<sub>1</sub>, ou seja,

$$\underline{I}_1 \underline{G}^{n+2} = \underline{I}_1 \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{I}_1 \underline{A} \underline{G}^{n+2} + \Delta t \underline{I}_1 \underline{S}^{n+2} \quad (47)$$

Por outro lado, é fácil mostrar que

$$\underline{I}_1 \underline{G}^{n+3} = 2 \underline{I}_1 \underline{G}^{n+2} - \underline{I}_1 \underline{G}^{n+1},$$

o que permitirá como no método ODD - EVEN, utilizar um úni  
co algoritmo para percorrer a malha, controlando somente  
as linhas a serem calculadas, visto que as equações que in  
vertem as linhas e que avançam no tempo são idênticas, a me  
nos das matrizes que identificam as linhas.

Devido a forma pela qual a malha é varrida, o mêto  
do é denominado de "LINE HOPSCOTCH", vale notar que em re  
lação ao método ADI, o método LINE executa metade das in  
versões das matrizes.

#### 3.5.4 - Método ADI - HOPSCOTCH

Gourlay e McGuire<sup>9</sup> sugeriram ainda um novo ADI ba  
seado na inversão de linhas alternadas espacialmente. O mê  
todo, denominado de "ADI HOPSCOTCH", devido a ap  
resentar uma forma de partição semelhante ao ADI, realiza inversões

em uma direção para linhas alternadas da malha.

Sejam as matrizes  $\underline{A}_1$  e  $\underline{A}_2$  definidas no Apêndice B, método ADI. O algoritmo do método ADI-HOPSCOTCH consiste em tomar as linhas dadas por  $\underline{I}_1$  implicitamente numa direção e as linhas dadas por  $\underline{I}_2$  explicitamente na outra, onde  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_2$  são dadas por (39) e (40) respectivamente. Dessa forma teremos

$$\underline{I}_1 \left( \frac{\underline{G}^{n+1} - \underline{G}^n}{\Delta t} \right) = \underline{I}_1 \underline{A}_1 \underline{G}^{n+1} + \underline{I}_1 \underline{A}_2 \underline{G}^n + \underline{I} \underline{S}^{n+1/2}$$

$$\underline{I}_2 \left( \frac{\underline{G}^{n+1} - \underline{G}^n}{\Delta t} \right) = \underline{I}_2 \underline{A}_1 \underline{G}^n + \underline{I}_2 \underline{A}_2 \underline{G}^{n+1} + \underline{I}_2 \underline{S}^{n+1/2}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \underline{G}^{n+1} - \Delta t \underline{I}_1 \underline{A}_1 \underline{G}^{n+1} &= \underline{I}_1 \underline{G}^n + \Delta t \underline{I}_1 \underline{A}_2 \underline{G}^n + \\ &+ \Delta t \underline{I}_1 \underline{S}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 \underline{G}^{n+1} - \Delta t \underline{I}_2 \underline{A}_2 \underline{G}^{n+1} &= \underline{I}_2 \underline{G}^n + \Delta t \underline{I}_2 \underline{A}_1 \underline{G}^n + \\ &+ \Delta t \underline{I}_2 \underline{S}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Note-se que as equações representam realmente um ADI, porém com as direções de difusão tomadas em linhas alternadas espacilmente. Vale observar que as inversões ficam reduzidas à metade, visto que as equações (49) são resolvidas ponto a ponto. Esse ganho é devido ao fato de que os  $\underline{G}^{n+1}$ , vizinhos do ponto da linha em questão na equação

(49), já foram calculados por (48). Com isso teremos uma forma de resolver a equação (14) semelhante a um ADI, com a vantagem de só invertermos metade das linhas num intervalo de tempo, sendo essas linhas fixadas numa direção escolhida arbitrariamente.

### 3.5.5 - Natureza "MATRIX SPLITTING" dos Métodos HOPSCOTCH

Observando os métodos ODD - EVEN e LINE-HOPSCOTCH, notamos que para um nível de tempo  $n$ , sempre iniciaremos os cálculos com

$$\underline{I}_1 \underline{G}^{n+1} = \underline{I}_1 \underline{G}^n + \Delta t \underline{I}_1 \underline{A} \underline{G}^n + \Delta t \underline{I}_1 \underline{S}^n \quad (50)$$

e

$$\underline{I}_2 \underline{G}^{n+1} = \underline{I}_2 \underline{G}^n + \Delta t \underline{I}_2 \underline{A} \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{I}_2 \underline{S}^{n+1} \quad (51)$$

Somando (50) com (51) fica

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \underline{G}^{n+1} + \underline{I}_2 \underline{G}^{n+1} &= \underline{I}_1 \underline{G}^n + \underline{I}_2 \underline{G}^n + \Delta t \underline{I}_1 \underline{A} \underline{G}^n + \\ &+ \Delta t \underline{I}_2 \underline{A} \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{I}_1 \underline{S}^n + \Delta t \underline{I}_2 \underline{S}^{n+1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Por outro lado

$$\underline{I}_1 \underline{G}^{n+1} + \underline{I}_2 \underline{G}^{n+1} = \underline{G}^{n+1} \quad (53)$$

o mesmo para  $G^n$ . Dessa forma a equação (52) fica

$$\begin{aligned} \underline{G}^{n+1} = \underline{G}^n + \Delta t \underline{I_1} \underline{A} \underline{G}^n + \Delta t \underline{I_2} \underline{A} \underline{G}^{n+1} + \\ + \Delta t (\underline{I_1} \underline{S}^n + \underline{I_1} \underline{S}^{n+1}) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \underline{G}^{n+1} - \Delta t \underline{I_2} \underline{A} \underline{G}^{n+1} = \underline{G}^n + \Delta t \underline{I_1} \underline{A} \underline{G}^n + \\ + \Delta t (\underline{I_1} \underline{S}^n + \underline{I_2} \underline{S}^{n+1}). \end{aligned} \quad (54)$$

Se incrementarmos  $n$  na equação (54), deveremos trocar  $I_2$  e  $I_1$  entre si, na proporção que o tempo avança, pois as linhas a serem calculadas se alternam no decorrer do tempo. Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned} \underline{G}^{n+2} - \Delta t \underline{I_1} \underline{A} \underline{G}^{n+2} = \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{I_2} \underline{A} \underline{G}^{n+1} + \\ + \Delta t (\underline{I_2} \underline{S}^{n+1} + \underline{I_1} \underline{S}^{n+2}). \end{aligned} \quad (55)$$

Fazendo agora

$$\underline{A_1} = \underline{I_1} \underline{A} \quad (56)$$

e

$$\underline{A_2} = \underline{I_2} \underline{A} \quad (57)$$

as equações (54) e (55) ficam, após rearranjos

$$\begin{aligned} [\underline{I} - \Delta t \underline{A}_2] \underline{G}^{n+1} = [\underline{I} + \Delta t \underline{A}_1] \underline{G}^n + \\ + \Delta t (\underline{I}_1 \underline{S}^n + \underline{I}_2 \underline{S}^{n+1}) , \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} [\underline{I} - \Delta t \underline{A}_1] \underline{G}^{n+2} = [\underline{I} + \Delta t \underline{A}_2] \underline{G}^{n+1} + \\ \Delta t (\underline{I}_2 \underline{S}^{n+1} + \underline{I}_1 \underline{S}^{n+1}) , \end{aligned} \quad (59)$$

mostrando serem os métodos ODD - EVEN e LINE HOPSCOTCH pertencentes à classe dos métodos "MATRIX SPLITTING", com as partições das matrizes feitas pelos pontos ou pelas linhas da malha. No caso do método ADI HOPSCOTCH, a matriz  $\underline{A}$  foi partida conforme o ADI original, porém as diagonais principais das matrizes  $\underline{A}_1$  e  $\underline{A}_2$  foram associadas com as linhas da malha.



## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

#### 4.1 - Formulação do Problema de Condução do Calor

Os métodos numéricos, vistos no Capítulo anterior, serão aplicados à resolução numérica da equação de condução do calor, conforme foi visto na seção 1.4, para uma geometria cilíndrica, com simetria axial. As propriedades físicas tais como condutividade térmica  $K$  (cal/s.°C.m), calor específico  $c$  (cal/°C.Kg) e densidade de massa ( $\text{Kg/m}^3$ ) serão considerados uniforme e não dependentes do tempo. Quando existir fontes de calor, a mesma será uniforme, com a possibilidade de variar com o tempo. Além do mais a difusão do calor será considerada somente ao longo das direções axiais e radiais.

A equação que descreve a condução do calor em geometria cilíndrica com simetria axial, é dado por :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \ddot{q} \quad , \quad (60)$$

onde

$T$  = temperatura (°F)

$r$  = distância radial (m)

$z$  = distância axial (m)

$t$  = tempo (s)

A condição de contorno poderá ser o resfriamento por um fluido seguindo a lei de Newton do resfriamento, ou temperatura determinada neste contorno.

A equação (60) pode ser encarada como uma equação de difusão de energia. No caso do calor, as constantes  $c_1$  e  $c_2$  foram substituídas pelas constantes  $\rho c$  e  $K$  respectivamente, com a grandeza  $G$  representando a temperatura  $T$ . Da mesma forma veremos que nos contornos da parede obteremos equações de balanço de energia semelhante à equação (2).

#### 4.2 - Equação de Condução do Calor Discretizada em Espaço

A discretização da equação (60), associada às condições de contorno citadas na seção anterior, é feita no Apêndice D. Neste Apêndice, os resultados são colocados sob a forma de notação matricial de maneira que se tenha

$$\frac{dT}{dt} = \underline{A} \underline{T} + \underline{S} \quad , \quad (61)$$

representando a equação de condução de calor discretizada em espaço.

#### 4.3 - Solução Estacionária

A solução estacionária da equação (61) é calculada utilizando-se um dos métodos descritos no Apêndice E.

## 4.4 - Solução Temporal

### 4.4.1 - Introdução

A solução temporal de (61) é buscada a partir de partição da matriz  $\underline{A}$ , para aproximar a derivada temporal em (61).

### 4.4.2 - Solução ADI

Tomando a difusão do calor na direção axial como implícita e a difusão do calor na direção radial explícita, trocando os processos a cada intervalo de tempo, é fácil mostrar que, para um ponto genérico (i,j)

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^{n+1} + (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^{n+1} = \\
 & = \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^n + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^n + s^{n+1},
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

num intervalo de tempo e

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^{n+2} + (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+2} - \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^{n+2} = \\
 & = \alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^{n+1} + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+1} + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^{n+1} + \\
 & + s^{n+2}
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

no outro intervalo de tempo.

#### 4.4.3 - Solução ADE

De acordo com as definições dadas para as matrizes  $\underline{A}_1$  e  $\underline{A}_2$ , dadas no método ADE, num ponto genérico (i,j) tem-se

$$\begin{aligned} & -\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^{n+1} - \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^{n+1} + (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+1} = \\ & = (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^n + s^n, \end{aligned} \quad (64)$$

num intervalo de tempo e

$$\begin{aligned} & (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+2} - \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^{n+2} - \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^{n+2} = \\ & \alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^{n+1} + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+1} + s^{n+2}, \end{aligned} \quad (65)$$

no outro intervalo.

Do ponto de vista de programação, as equações (64) e (65) são resolvidas pondo

$$\begin{aligned} T_{i,j} = & (\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j} + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j} + \\ & + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j} + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1} + s) / (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2), \end{aligned} \quad (66)$$

redefinindo o sentido de percurso da malha a cada intervalo de tempo. Isto é possível, já que se utilizam sempre os valores mais recentes das temperaturas, em ambos os senti

dos de percurso.

#### 4.4.4 - Solução ODD - EVEN

A solução da equação (61) pelo método ODD - EVEN consiste em inicializar os cálculos com as equações discretizadas espacialmente, sob forma da equação (30) :

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} = & (\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^n + \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^n + \\
 & + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}) T_{i,j}^n + \\
 & + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^n + s^n)/(\Delta t) \quad (67)
 \end{aligned}$$

Visto que a equação (67) calcula os pontos da malha para os quais  $i+j+n$  é um número ímpar, os outros pontos são calculados por (32) e (34), isto é, aqueles para os quais  $i+j+n+1$  é um número ímpar. Dessa forma tem-se :

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} = & (\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^{n+1} + (1/\Delta t) T_{i,j}^n + \\
 & + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^{n+1} + s^n)/(\Delta t + \alpha_{i,j}) \quad (68)
 \end{aligned}$$

e

$$T_{i,j}^{n+3} = 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n \quad (69)$$

A equação (67) é usada para indicar os cálculos e (69) para avançar no tempo. Vale ressaltar que na equação (68) as temperaturas  $T_{i\pm 1,j}$  e  $T_{i,j\pm 1}$  são explícitas, devido à equação (67).

#### 4.4.5 - Solução Line

Na resolução de (61) pelo método LINE HOPSCOTCH, escolheu-se a direção axial como direção das linhas da malha espacial. Inicialmente assumiu-se a difusão do calor explicitamente para as linhas da malha nas quais  $i+n=\text{ímpar}$ . De acordo com (42) tem-se

$$T_{i,j}^{n+1} = (\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^n + \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^n + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}) T_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^n + s^n) / (1/\Delta t). \quad (70)$$

Semelhante ao Método ODD - EVEN, a equação (70) é usada para iniciar os cálculos no tempo. Dessa forma para prosseguir no tempo, utiliza-se o procedimento dado por (44) para as linhas da malha em que  $i+n=\text{par}$ . Daí tem-se

$$\begin{aligned} -\alpha_{i,j-1} T_{i,j}^{n+1} + (1/\Delta t + \alpha_{i,j}) T_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^n &= \\ = \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^{n+1} + (1/\Delta t) T_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1} + s^{n+1}, \end{aligned} \quad (71)$$

com o avanço no tempo dado por

$$T_{i,j}^{n+2} = 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n \quad (72)$$

Os termos  $T_{i\pm 1,j}^{n+1}$  foram postos à direita de (72) visto que os mesmos já são conhecidos de (70). Dessa forma o sistema de equações (71) é resolvido semelhantemente ao método ADI.

#### 4.4.6 - Solução ADI-HOPSCOTCH

Associando a matriz  $\underline{A}_1$  com a difusão do calor na direção axial e  $\underline{A}_2$  com a direção radial, com as linhas da malha orientadas segundo a direção axial, aplicando-se a equação (48) à equação (61) nas linhas onde  $i+n=\text{ímpar}$ , tem-se

$$\begin{aligned} -\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^{n+1} + (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^{n+1} = \\ = \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^n + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^n + s^{n+1/2} \end{aligned} \quad (73)$$

Agora lançando mão da equação (49) para as linhas em que  $i+n=\text{par}$ , fica

$$\begin{aligned} -\alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^{n+1} + (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1} = \\ = \alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^n + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^n + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^n + s^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (74)$$

O sistema de equações (73) é resolvido invertendo-se a matriz tridiagonal conforme o procedimento dado no método ADI. Já a equação (74) é colocada sob a forma

$$T_{i,j}^{n+1} = (\alpha_{i,j-1} T_{i,j-1}^n + \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j}^{n+1} + (1/\Delta t - \alpha_{i,j}/2) T_{i,j}^n + \\ + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1} + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1}^n + s^{n+1/2}) / (1/\Delta t + \alpha_{i,j}/2)$$

(75)

visto que os termos  $T_{i\pm 1,j}^{n+1}$  são conhecidos a partir de (74). Dessa forma os  $T_{i,j}^{n+1}$  de (75) são resolvidos ponto a ponto.



## CAPÍTULO V

### RESULTADOS E CONCLUSÕES

#### 5.1 - Introdução

Os métodos apresentados na seção 3 foram analisados utilizando-se da equação de condução do calor em geometria cilíndrica com simetria axial. Duas classes de testes foram analisadas. Numa classe procura-se analisar o comportamento de uma vareta sujeita ao resfriamento por um fluído. Nesses testes, permitiu-se a fonte de calor variar com o tempo, se gundo uma rampa, um degrau e segundo um decaimento, os con tornos da vareta permaneceram sujeitos a um fluído à tempe ratura fixa e uniforme.

A outra classe de teste consistiu-se em analisar a distribuição de temperatura no interior de um cilindro, em que todo o cilindro inicialmente encontrava-se à temperatu ra zero, e que durante um transitório, a temperatura dos contornos é elevada e fixada em 1000°F.

Os termos vareta e cilindro são usados no seguinte sentido: "vareta" quando a altura do cilindro é muito maior que o diâmetro, e "cilindro" quando a altura do mesmo é da ordem de grandeza do diâmetro.

## 5.2 - Comportamento de uma Vareta

### 5.2.1 - Descrição dos Testes

A distribuição de temperatura na vareta foi calculada durante transitórios pelos métodos ADI, ADE, ODD-EVEN, LINE e ADI-HOPSCOTCH, sendo que o método ADI clássico foi utilizado na verificação de programação dos métodos LINE e ADI-HOPSCOTCH. Procurou-se definir um resultado padrão analisando-se o método ADE para vários incrementos de tempo, visto que o método ADE é extremamente rápido, preciso e convergente. Com base no ADE padrão calculou-se os erros percentuais relativos associados aos métodos ODD-EVEN, LINE e ADI-HOPSCOTCH observando-se um ponto da malha espacial onde normalmente ocorre o maior erro, para a maioria dos métodos. Aqui o ponto escolhido foi o (1,3). Os resultados foram dispostos em tabelas. Vários gráficos dos erros percentuais foram construídos, sendo que os resultados com erros percentuais absolutos superiores a 4% foram desprezados.

### 5.2.2 - Parâmetros Físicos e Geométricos da Vareta

Na tabela 1 tem-se os parâmetros físicos e geométricos da vareta. Verificou-se que utilizando-se uma malha contendo 6 pontos radiais e 5 pontos axiais obtém-se os mesmos perfis de temperatura axial e radial da mesma forma que se utilizando maior número de pontos na direção axial, principalmente para pontos fora do contorno da vareta.

### 5.2.3 - Fonte em Rampa

a) Nesse teste a fonte de calor varia segundo a função

$$\ddot{q} = 169 \times 10^{-5} \ddot{q}_0 t, \quad \ddot{q}_0 = 5,889 \times 10^3 \text{ Btu/S.ft}^3$$

As temperaturas na vareta são avaliadas durante um transitório de 160s. A tabela 2 apresenta os resultados dos erros percentuais relativos a valiados no ponto (1,3). A dependência do erro com o tempo para vários incrementos de tempo é mostrada nas Figuras 5,6 e 7.

A Figura 8 mostra a variação da temperatura com o tempo para os métodos visto na seção 3, utilizando incremento de tempo de um segundo. O ADE padrão foi calculado para incremento de tempo igual a .25 segundos.

- b) A fonte de calor cresce a partir de  $t=0$ , segundo a função

$$\ddot{q} = \ddot{q}_0 (1 + 169 \times 10^{-5} t)$$

onde  $\ddot{q}_0$  é a fonte de calor do estacionário. A distribuição de temperatura do estacionário é calculada utilizando-se o método SOR descrito no Apêndice E. Os erros percentuais relativos para os métodos HOPSCOTCH são mostrados na tabela 3, com o ADE padrão de 0,25 segundos e  $\ddot{q}_0$  tomado como  $5,889 \times 10^4 \text{ Btu/s.ft}^3$ . A Figura 9 mos tra a dependência do erro percentual relativo

com o tempo para o método LINE, visto que para os outros HOPSCOTCH, os erros são bem menores que 1%, para os incrementos de tempos usados. A variação da temperatura com o tempo é mostrado na figura 10, para  $\Delta t = 1$  seg.

#### 5.2.4 - Fonte em Degrau

Aqui a fonte de calor, nula no estacionário, assume o valor  $.5889 \times 10^4$  Btu/s.ft<sup>3</sup> durante o transitório. Com o ADE padrão de  $\Delta t = .25$ s calculou-se os erros percentuais relativos de cada método para vários intervalos de tempo. Os resultados são dados na tabela.4 e nas Figuras 11 e 12. O método LINE apresentou erros superiores a 4% para cada intervalo de tempo testado.

A variação da temperatura com o tempo é mostrada na Figura 13 para os 5 métodos, utilizando-se um  $\Delta t$  de um segundo.

#### 5.2.5 - Fonte em Decaimento

A partir de uma distribuição de temperatura no estacionário gerada por uma fonte fixa  $\ddot{q}_0 = .7361 \times 10^4$  Btu/s.ft<sup>3</sup>, são geradas outras temperaturas com a fonte variando durante um transitório, como

$$\ddot{q} = .095 \cdot \ddot{q}_0 \cdot t^{-.26}$$

Erros calculados estão na tabela 5 e nas Figuras 14 e 15,

quando o ADE padrão foi de .125 segundos. A Figura 16 mostra a dependência da temperatura com o tempo, para os cinco métodos, tomando-se um incremento de tempo de 2. segundos. Nota-se na tabela 5 que o método LINE possui erro percentual superior a 4% em cada intervalo de tempo observada

#### 5.2.6 - Convergência dos Métodos

A convergência dos métodos HOPSCOTCH foi verificada no teste 5.2.b, observando-se a dependência do erro percentual com os incrementos de tempo, para isso tomou-se o tempo de 32 segundos como tempo de observação. Os resultados são mostrados na Figura 17.

#### 5.3 - Comportamento de um Cilindro

Nesse teste, os métodos HOPSCOTCH foram analisados observando-se os perfis temporal e espacial das temperaturas em pontos do cilindro, durante um transitório de 1152 segundos.

Os parâmetros físicos e geométricos do cilindro são mostrados na tabela 6. As temperaturas calculadas pelos métodos estão nas tabelas 7, 8, 9 e 10.

As dependências das temperaturas com o tempo e espaço foram ilustradas pelas Figuras de 18 a 24. Nessas Figuras procurou-se comparar os perfis obtidos pelos métodos HOPSCOTCH, com os perfis obtidos pelo método ADE convergido.

#### 5.4 - Conclusões

Analisando-se os testes realizados sobre cada mêto do HOPSCOTCH verifica-se que :

- a) para transitórios devido a uma perturbação suave, tal como provocada no teste 5.2.(2b), os mêto dos HOPSCOTCH exibem erros menores que 1%, exceto o LINE, onde o erro chega a 1,5%. Note que esse teste é suave no sentido que já existe uma distribuição espacial de temperatura. Esta cresce somente em amplitude.
- b) Nos transitórios onde ocorre perturbações mais fortes, a precisão dos métodos varia bastante com os incrementos de tempo usados. Isso pode ser observado nos resultados dos testes 5.2.2a, 5.2.3 e 5.3. Note que nesses testes, além da temperatura aumentar em amplitude, ocorre a deformação espacial nos perfis de temperatura.
- c) É provável que uma das causas principais da perda de precisão dos métodos LINE e ODD-EVEN, com o incremento de tempo usado, seja a forma de resolver a malha espacial. Nesses métodos a malha espacial é resolvida percorrendo linhas e pontos alternados da malha. Essas alternâncias de linhas e pontos implicará em utilizar-se equações de avanço no tempo. Essas equações tornam

explícitos os métodos de cálculo, desde que utilizam-se informações antigas para se preverem valores recentes das temperaturas. Dessa forma, como é sabido, a natureza explícita dos métodos LINE e ODD-EVEN torna seus erros sensivelmente dependentes do incremento de tempo utilizado.

- d) A melhor precisão do método ADI-HOPSCOTCH, apesar de percorrer a malha em linhas alternadas, reside no fato de não utilizar equações de avanço no tempo. Além do mais a simulação da difusão do calor em cada direção é alternada com o tempo, o que não acontece no caso do método LINE. Essa alternância faz com que nenhuma direção tenha tratamento diferente.
- e) Os métodos HOPSCOTCH mostraram-se convergentes, apesar da perda de precisão com o aumento do incremento de tempo, o que pode ser verificado na Figura 17.
- f) Do ponto de vista de programação, os métodos LINE e ADI-HOPSCOTCH continuam a ter que inverter linhas da malha, como no método ADI, apesar disso ser necessário somente para a metade das linhas, quando comparado com o método ADI. Já o método ODD-EVEN é facilmente programável no sentido que as equações são resolvidas ponto a ponto. Dessa

forma, tem-se um algoritmo quase que equivalente ao método ADE, em termos de operações, uma vez que o método ODD-EVEN resolve metade dos pontos do ADE.

g) Em termos de espaço de memória, somente o mêtodo ODD-EVEN é econômico, visto que os outros HOPSCOTCH requerem pelo menos uma inversão de matriz, o que normalmente requer um maior espaço de memória. Já o método ODD-EVEN resolve as equações ponto a ponto, somente para a metade dos pontos da malha.

h) Finalmente, em ambos os testes realizados, os resultados obtidos mostram a existência de uma hierarquia entre os métodos HOPSCOTCH em termos de precisão e eficiência em programação. Nos testes realizados notou-se que o ADI-HOPSCOTCH foi o método que apresentou melhor precisão, seguindo-se o método ODD-EVEN. Já o método LINE mostrou-se de pouca precisão. No entanto, em termos de eficiência em programação o ODD-EVEN mostrou-se competitivo ao método ADE, tornando viável o seu uso em problemas onde a precisão não é um fator limitante. Desta forma o método ODD-EVEN torna-se uma alternativa ao uso do mêdo ADE.



Face ao resultados obtidos, conclui-se que os objetivos deste trabalho foram atingidos, no sentido de se obter algoritmos rápidos e eficientes para serem utilizados futuramente em códigos de simulação de centrais Nucleares do tipo PWR.

TABELA 1 : Parâmetros físicos e geométricos.

PARÂMETROS	VALORES
Número de pontos radiais	6
Número de pontos axiais	5
Condutividade térmica	$.42777 \times 10^{-3} \text{ Btu/hr.ft.}^{\circ}\text{F}$
Massa específica	$.6243 \times 10^3 \text{ lbm/ft}^3$
Calor específico	$.5900 \times 10^{-1} \text{ Btu/hr.ft}^3$
Raio do cilindro	$.41665 \times 10^{-1} \text{ ft}$
Altura do cilindro	$.1200 \times 10^2 \text{ ft}$
Temperatura do fluido	$.55 \times 10^3 \text{ }^{\circ}\text{F}$
Coefficiente de transferência de calor	$.149 \times 10^1 \text{ Btu/hr ft}^2 . \text{ }^{\circ}\text{F}$

TABELA 2 : Erro percentual com o tempo, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.

Método	t(s) Δt(s)	16	32	48	64	80	120	160
ADE	4	1,467	1,532	1,037	.559	.220	-.161	-.241
	2	.403	.381	.231	.102	.019	-.060	-.069
	1	.098	.088	.051	.021	.002	-.015	-.016
	.5	.019	.017	.010	.004	.000	-.003	-.003
LINE	4	59.652	26.565	6.046	-2.974	-19.988	3.010	-9.048
	2	18.887	9.470	1.695	-2.568	-8.291	-6.531	-5.086
	1	7.576	3.058	-.934	-2.961	-4.396	-3.795	-3.126
	.5	3.432	.341	-1.882	-2.825	-3.118	-2.755	-2.276
ODD-EVEN	4	-2.203	-2.745	-2.243	-1.692	-4.353	-3.060	-2.359
	2	-1.691	-2.243	-2.167	-2.167	-2.432	-1.797	-1.408
	1	-.979	-1.349	-1.353	-1.238	-1.278	-.961	-.758
	.5	-.519	-.519	-.727	-.739	-.682	-.495	-.391
ADI- HOPSCOTCH	4	-1.126	-1.447	-1.350	-1.165	-.993	-.701	-.540
	2	-.467	-.620	-.601	-.536	-.469	-.343	-.268
	1	-.211	-.286	-.284	-.257	-.227	-.169	-.133
	.5	-.102	-.139	-.139	-.126	-.112	-.083	-.065

TABELA 3 : Erro percentual com o tempo, teste da fonte em rampa a partir de valor inicial.

Método	t(s) Δt(s)	16	32	48	64	80	120	160
ADE	4	.129	.153	.120	.075	.033	-.031	-.057
	2	.035	.038	.026	.013	.002	-.012	-.016
	1	.008	.008	.005	.002	.000	-.003	-.003
	.5	.001	.001	.001	.000	.000	-.000	-.000
LINE	4	-.353	-.876	-1.270	-1.544	-1.337	-1.395	-1.334
	2	-.232	-.555	-.810	-.982	-.993	-1.112	-1.125
	1	-.162	-.386	-.556	-.664	-.682	-.750	-.746
	.5	-.127	-.295	-.416	-.491	-.515	-.555	-.546
ODD-EVEN	4	-.193	-.274	-.260	-.227	-.664	-.604	-.563
	2	-.148	-.224	-.251	-.258	-.371	-.354	-.336
	1	-.086	-.135	-.157	-.166	-.195	-.189	-.180
	.5	-.045	-.072	-.085	-.091	-.099	-.097	-.093
ADI HOPSCOTCH	4	-.099	-.144	-.156	-.156	-.151	-.138	-.129
	2	-.041	-.062	-.069	-.071	-.071	-.067	-.064
	1	-.018	-.035	-.034	-.034	-.034	-.033	-.031
	.5	-.009	-.014	-.016	-.016	-.017	-.016	-.015

TABELA 4 : Erro percentual com o tempo, teste da fonte em degrau.

MÉTODO	$\Delta t \backslash t(s)$	16	32	48	64	80	120	160
ADE	4	5.430	-1.104	-2.145	-2.028	-1.646	-.776	-.321
	2	1.106	-.500	-.661	-.554	-.409	-.154	-.049
	1	.224	-.137	-.160	-.129	-.093	-.033	-.010
	.5	.042	-.028	-.032	-.025	-.018	-.006	-.002
LINE	4	-38.346	-22.157	-14.784	-10.294	-4.774	1.251	-1.100
	2	-25.521	-15.053	-9.523	-6.109	-4.880	-2.131	-.926
	1	-18.075	-10.459	-6.278	-3.820	-2.865	-1.002	-.330
	.5	-13.943	-7.821	-4.542	-2.712	-1.908	-.589	-.171
ODD-EVEN	4	4.766	5.823	3.989	2.617	1.671	.496	.137
	2	1.496	1.379	.958	.639	.416	.132	.038
	1	.364	.346	.244	.165	.108	.034	.010
	.5	.080	.093	.069	.047	.031	.010	.003
ADI- WPSCT	4	-6.043	-1.522	-.263	.032	.102	.067	.024
	2	-2.561	-.719	-.243	-.080	-.020	.007	.004
	1	-1.189	-.371	-.144	-.060	-.060	-.001	.000
	.5	-.578	-.185	-.075	-.031	-.031	-.001	.000

TABELA 5 : Erro percentual com o tempo, teste da fonte com decaimento.

Método	t(s) Δt(s)	8	16	24	32	40	80	120	160
ADE	2	.554	1.422	2.217	2.867	3.368	3.560	1.782	.634
	1	.653	.913	1.107	1.236	1.512	1.077	.482	.160
	.5	.354	.429	.469	.488	.490	.342	.140	.044
	.25	.128	.146	.153	.153	.149	.093	.036	.010
LINE	2	12.712	20.953	26.822	30.756	25.734	27.206	16.964	8.351
	1	8.656	14.269	17.836	19.843	16.805	17.427	9.320	3.706
	.5	6.998	10.719	12.778	13.843	12.499	12.187	5.844	2.100
	.25	5.718	8.525	10.087	10.923	10.408	9.425	4.295	1.509
ODD-EVEN	2	5.217	4.562	3.684	2.820	2.418	.018	-.289	-.087
	1	2.195	2.128	1.915	1.667	1.505	.508	.123	.053
	.5	.963	.965	.903	.820	.786	.352	.119	.048
	.25	.417	.426	.407	.378	.357	.175	.065	.027
ADI- TOPSCORU	2	4.401	4.403	4.111	3.720	3.298	1.323	.332	.072
	1	1.955	1.981	1.884	1.738	1.571	.706	.207	.053
	.5	.850	.873	.836	.778	.708	.332	.102	.027
	.25	.345	.348	.333	.309	.281	.132	.041	.011

TABELA 6 : Parâmetros físicos e geométricos do cilindro.

PARÂMETROS	VALORES
Número de pontos radiais	13
Números de pontos axiais	13
Condutividade térmica	$.5555 \times 10^{-2}$ Btu/hr.ft. <sup>°F</sup>
Massa específica	$.6779 \times 10^{-3}$ lbm/ft <sup>3</sup>
Calor específico	$.5900 \times 10^{-1}$ Btu/hr.ft <sup>3</sup>
Raio do cilindro	.5 ft
Altura do cilindro	.5 ft

TABELA 7 : Temperatura ( $^{\circ}\text{F}$ ) com o tempo, método ADE, teste do cilindro.

PONTO	$t(s)$ $\Delta t(s)$	96	192	288	384	480	576	672	768	864	960	1056	1152
(3,11)	16	40	195	381	544	670	763	831	879	914	939	956	969
	8	44	245	468	640	760	840	894	929	953	969	979	986
	4	44	264	496	667	783	858	908	940	961	974	983	989
	2	44	270	504	674	788	863	911	942	963	976	984	990
	1	44	271	505	676	790	864	912	943	963	976	984	990
(7,7)	16	275	528	682	780	846	891	922	945	961	972	980	986
	8	282	563	722	818	880	920	947	965	976	984	989	993
	4	286	574	733	829	889	928	953	969	980	987	991	994
	2	287	577	736	831	891	930	954	970	981	987	992	994
	1	288	578	737	832	892	930	955	971	981	987	992	995
(11,3)	16	826	923	956	971	980	986	990	993	995	996	997	998
	8	861	938	964	977	985	990	993	995	997	998	998	999
	4	869	941	966	978	986	991	994	996	997	998	998	999
	2	871	942	966	979	986	991	994	996	997	998	998	999
	1	871	942	966	979	986	991	994	996	997	998	999	999



TABELA 8 : Temperatura ( $^{\circ}\text{F}$ ) com o tempo, método ODD-EVEN, teste do cilindro.

$\Delta t = 8 \text{ seg}$					$t = 4 \text{ seg}$					$t = 2 \text{ seg}$					$t = 1 \text{ seg}$				
Ponto $t(s)$	(3,11)	(7,7)	(11,3)	Ponto $t(s)$	(3,11)	(7,7)	(11,3)	Ponto $t(s)$	(3,11)	(7,7)	(11,3)	Ponto $t(s)$	(3,11)	(7,7)	(11,3)	Ponto $t(s)$	(3,11)	(7,7)	(11,3)
72	0	187	868	68	6	167	828	66	9	157	814	65	9	153	808				
144	129	484	928	136	121	439	916	132	115	421	910	130	112	413	908				
216	344	647	955	204	305	610	948	198	288	593	945	195	280	585	943				
288	524	752	969	272	476	721	964	264	454	706	962	260	444	700	961				
360	659	825	978	340	612	798	975	330	590	785	973	325	580	780	972				
432	757	875	984	408	715	853	982	396	695	842	980	390	685	837	980				
504	827	911	989	476	791	893	987	462	774	884	985	455	765	879	985				
576	877	937	992	544	847	922	990	528	832	914	989	520	825	910	989				
648	912	955	994	612	888	943	993	594	876	936	992	585	870	933	991				
720	937	968	996	680	918	958	994	660	908	953	994	650	903	950	994				
792	955	977	997	748	940	969	996	726	932	965	995	715	928	963	995				
864	968	983	998	816	956	977	997	792	950	974	996	780	946	972	996				

TABELA 9 : Temperatura ( $^{\circ}\text{F}$ ) com o tempo, método LINE, teste do cilindro.

PONTO	$t(s)$ $\Delta t (s)$	96	192	288	384	480	576	672	768	864	960	1056	1152
(3,11)	8	110	381	589	730	823	885	924	950	967	979	986	991
	4	45	270	499	668	782	857	907	939	960	974	983	988
	2	42	264	495	666	781	857	907	939	960	974	983	989
	1	43	265	497	668	783	859	908	940	961	974	983	989
(7,7)	8	464	666	785	860	908	940	961	974	983	989	992	995
	4	295	576	732	827	887	926	952	968	979	986	991	994
	2	282	570	730	826	887	926	952	969	979	986	991	994
	1	283	573	732	828	889	928	953	969	980	987	991	994
(11,3)	8	914	950	969	980	987	991	994	996	997	998	998	999
	4	862	935	962	976	984	990	993	995	997	998	998	999
	2	861	936	963	976	985	990	993	995	997	998	998	999
	1	864	938	964	977	985	990	994	996	997	998	998	999

TABELA 10 : Temperatura ( $^{\circ}\text{F}$ ) com o tempo, método ADI-HOPSCOTCH, teste do cilindro.

PONTO	$t(s)$	96	192	288	384	480	576	672	768	864	960	1056	1152
	$\Delta t(s)$												
(3,11)	8	37	254	487	660	777	854	905	938	957	973	982	988
	4	40	262	495	667	783	858	908	940	961	974	983	989
	2	42	266	500	671	786	861	910	941	962	975	984	989
	1	43	269	503	674	788	863	911	942	963	976	984	990
(7,7)	8	263	557	721	820	883	924	950	967	979	986	991	994
	4	273	566	727	825	887	926	952	969	980	987	991	994
	2	280	571	732	828	889	928	953	970	980	987	991	994
	1	283	575	734	830	891	929	954	970	981	987	992	994
(11,3)	8	848	931	960	975	983	989	993	995	997	998	998	999
	4	857	935	962	976	985	990	993	995	997	998	998	999
	2	863	938	964	977	985	990	994	996	997	998	998	999
	1	867	940	965	978	986	991	994	996	997	998	999	999

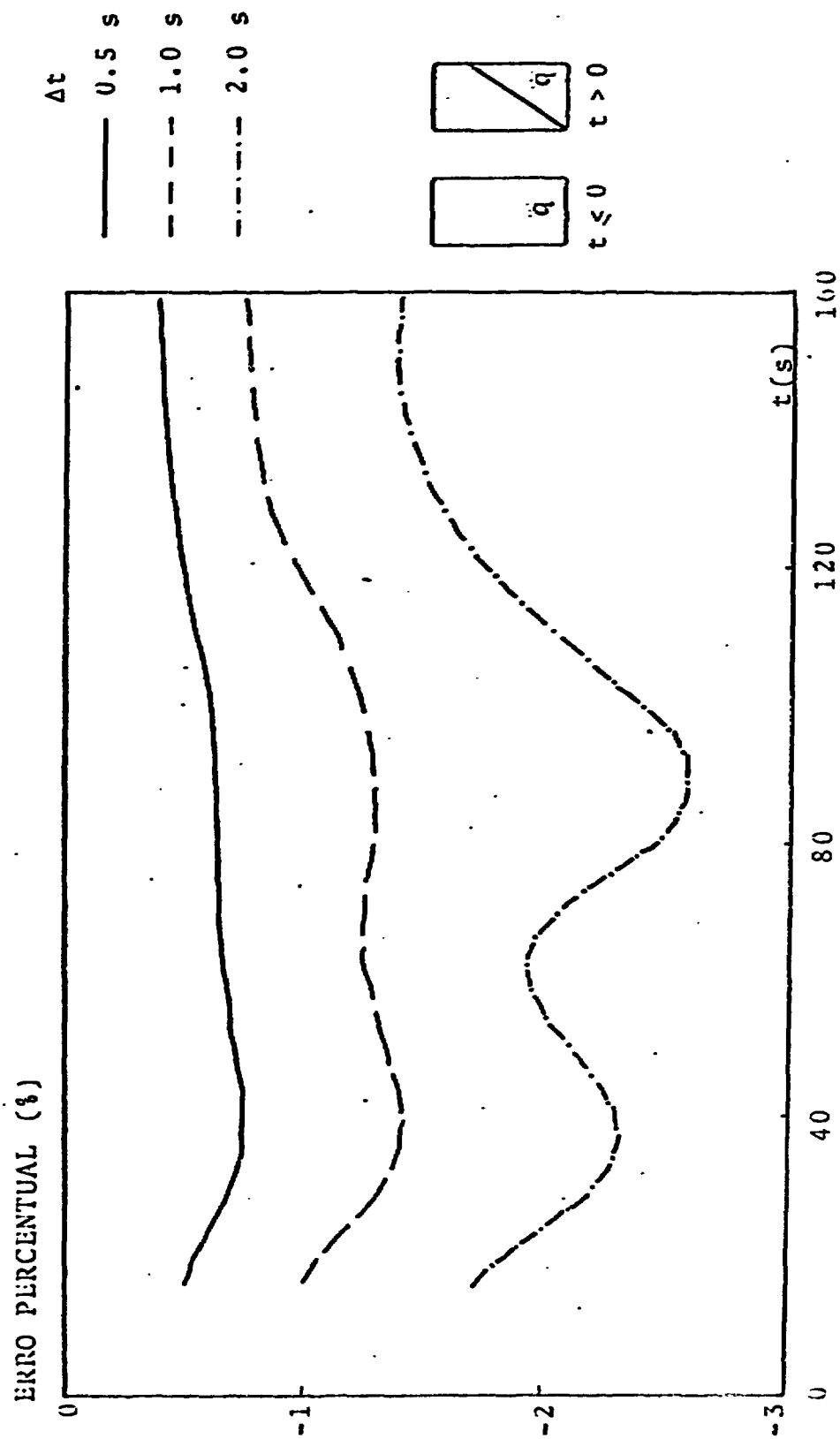


Figura 5 : Erro do método ODD-EVEN , teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.

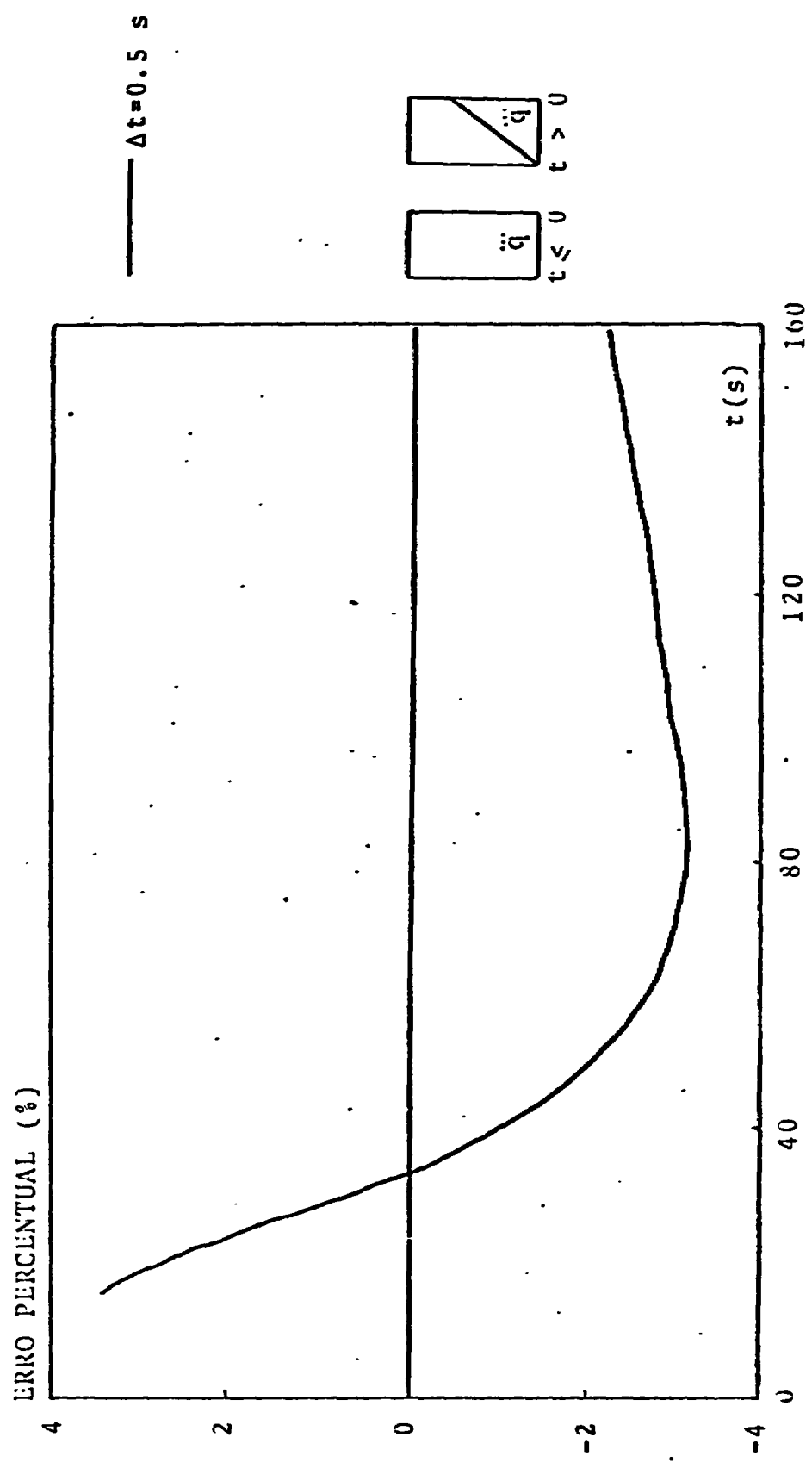


Figura 6 : Erro do Método Line, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.

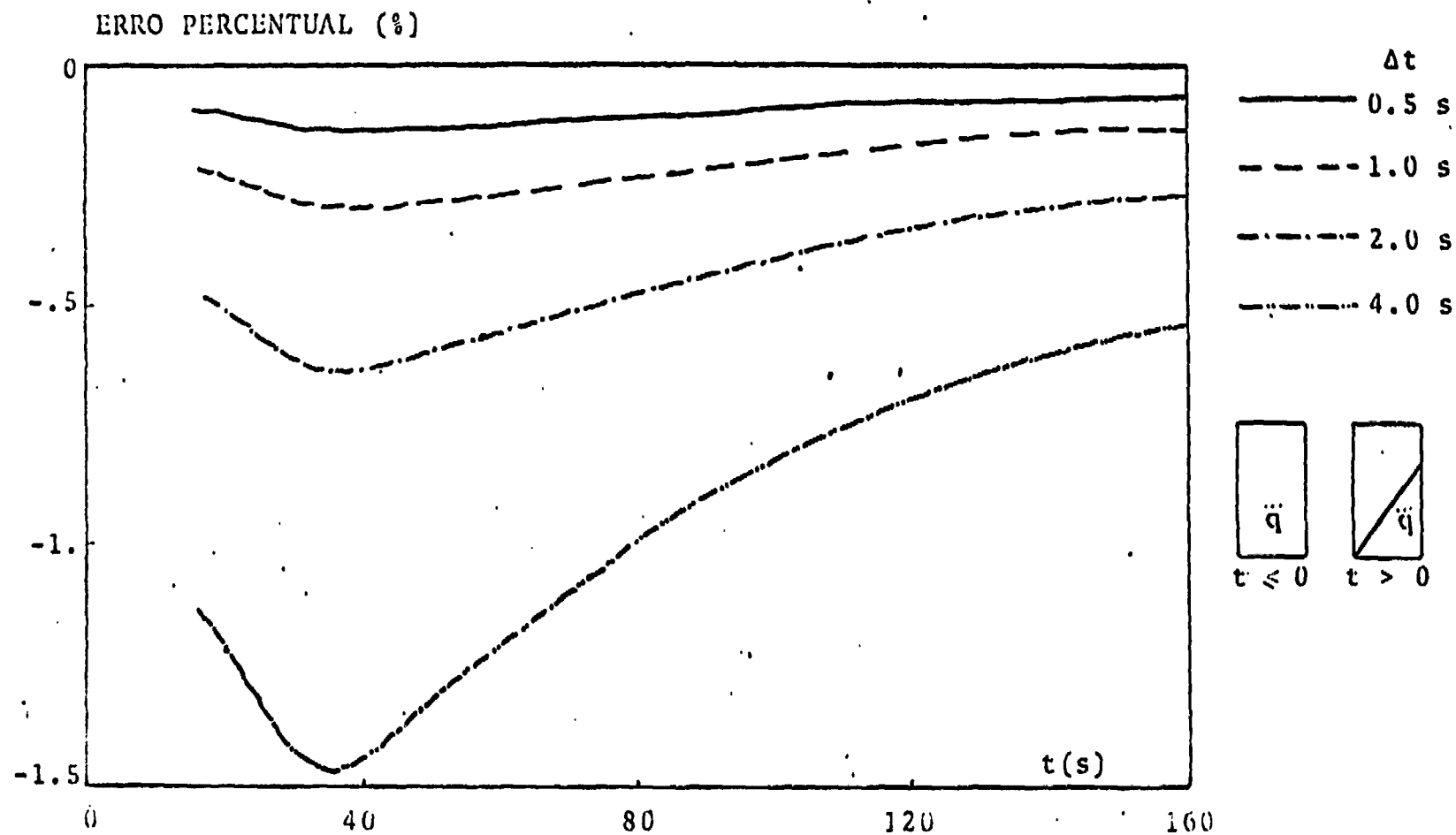


Figura 7 : Erro do método ADI-HOPSCOTCH , teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.

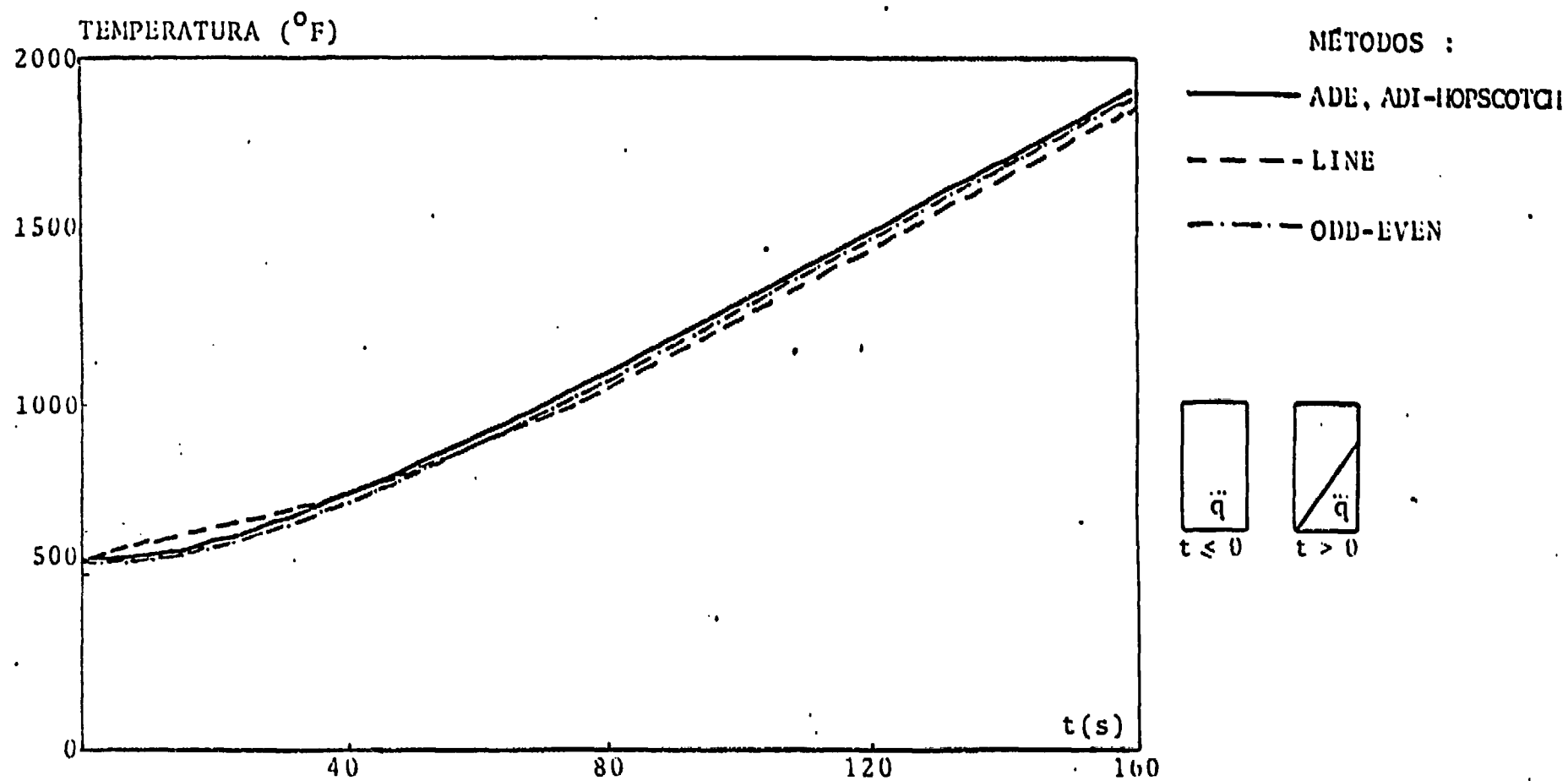


Figura 8 : Variação da temperatura com o tempo para cada método, teste da fonte em rampa a partir de valor nulo.

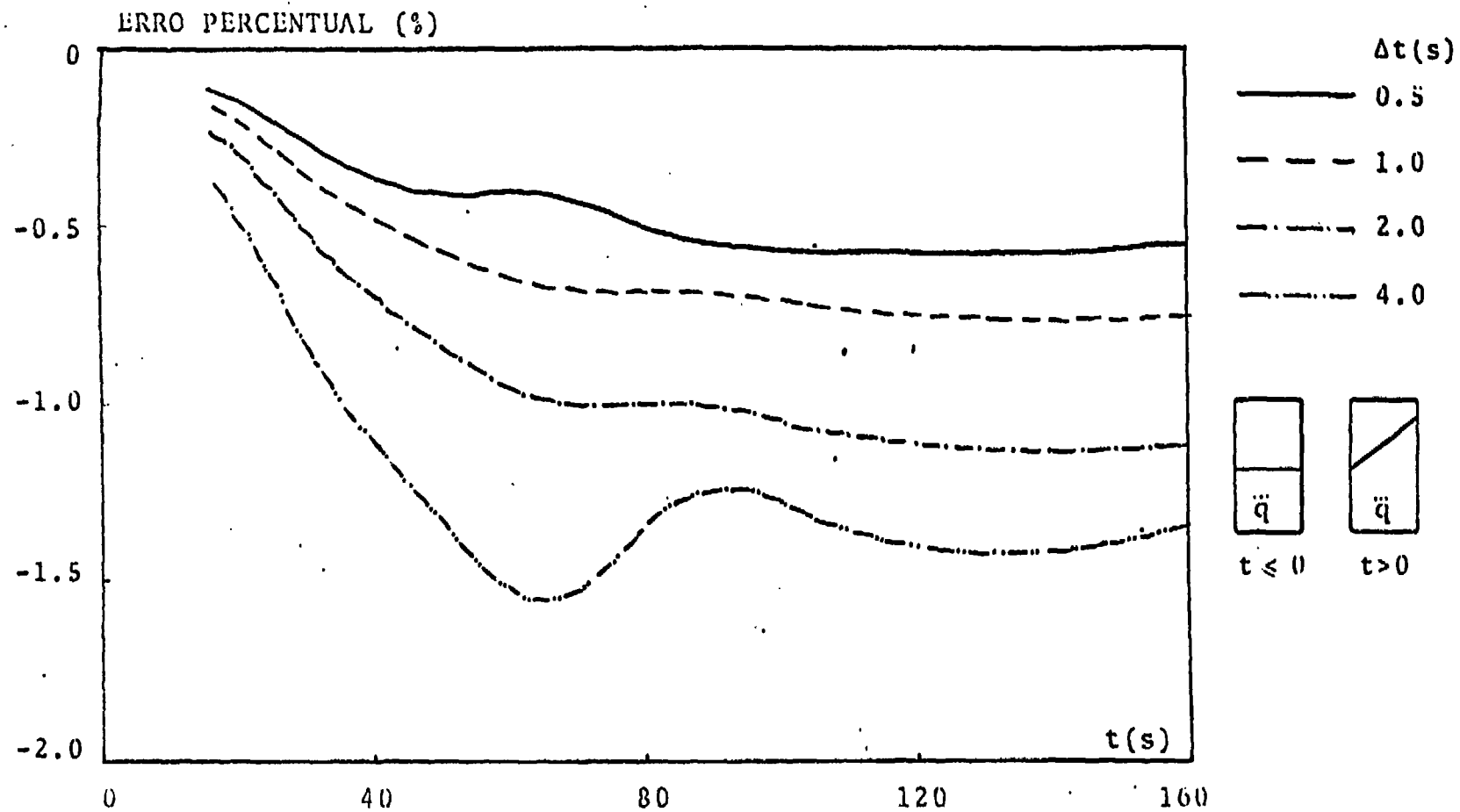


Figura 9 : Erro do Método LINE , teste da fonte em rampa a partir de uma distribuição inicial de temperatura.



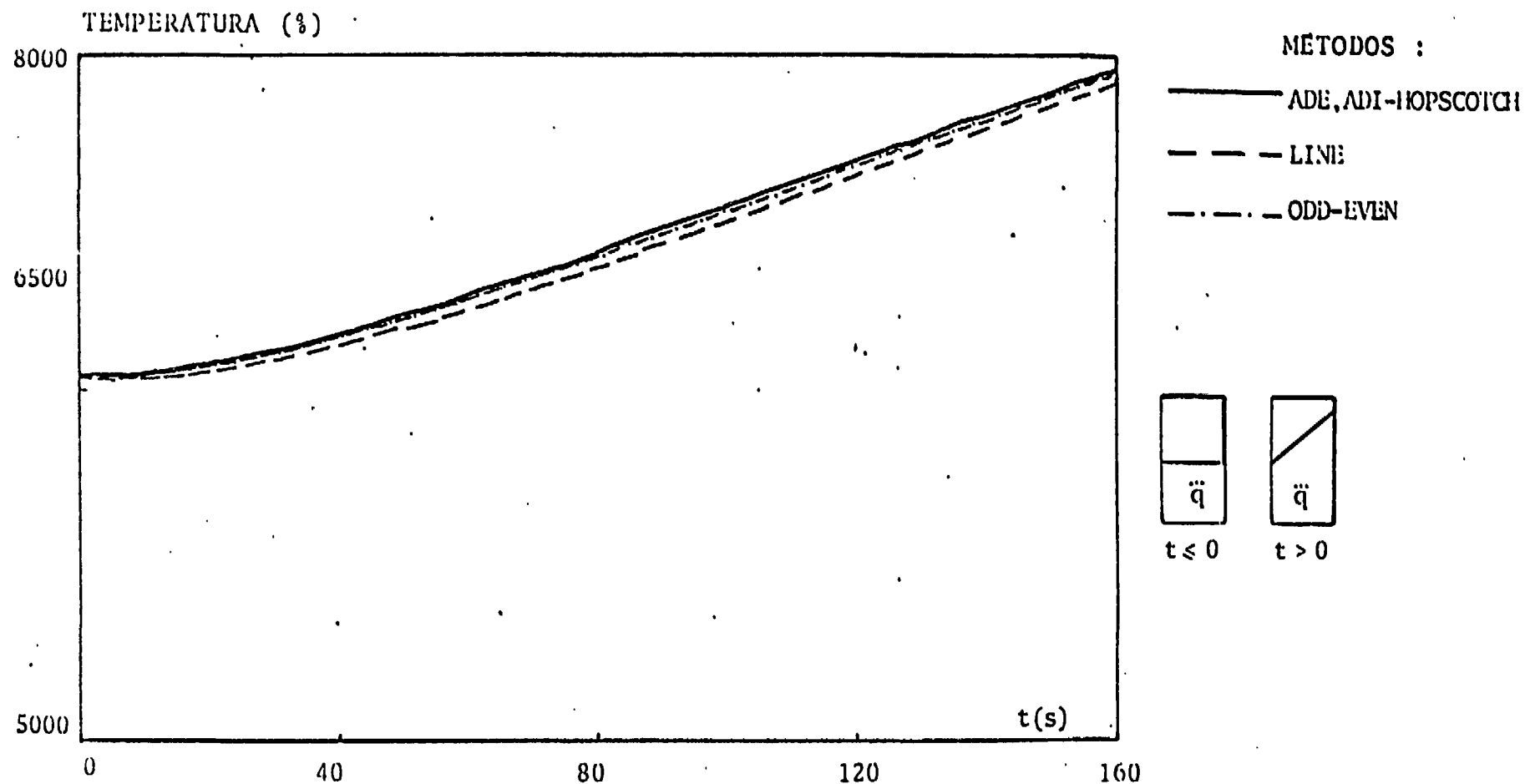


Figura 10 : Variação da temperatura com o tempo para cada método, teste da fonte em rampa a partir de uma distribuição inicial de temperatura.

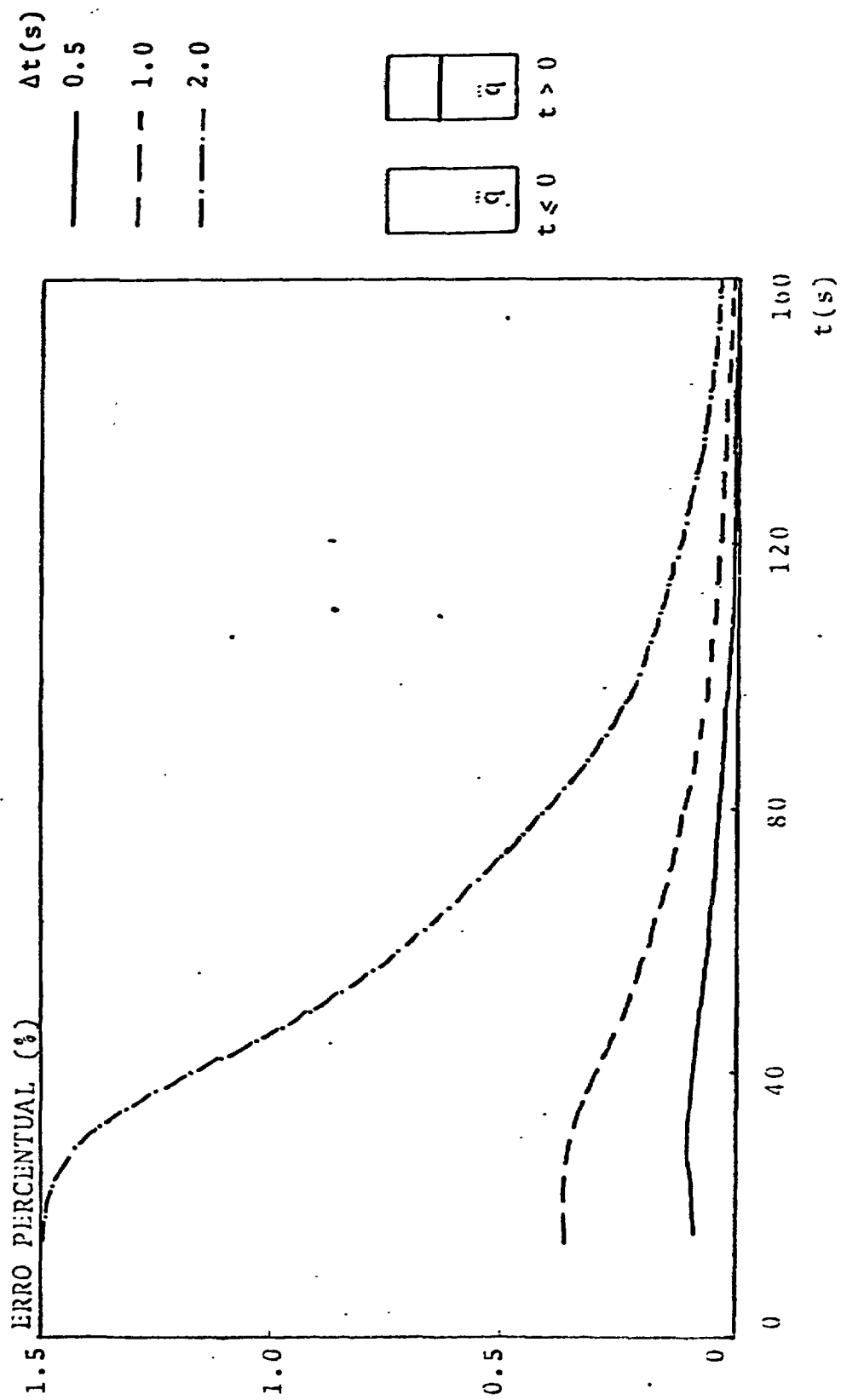


Figura 11 : Erro do método ODD-EVEN, teste da fonte em degrau.

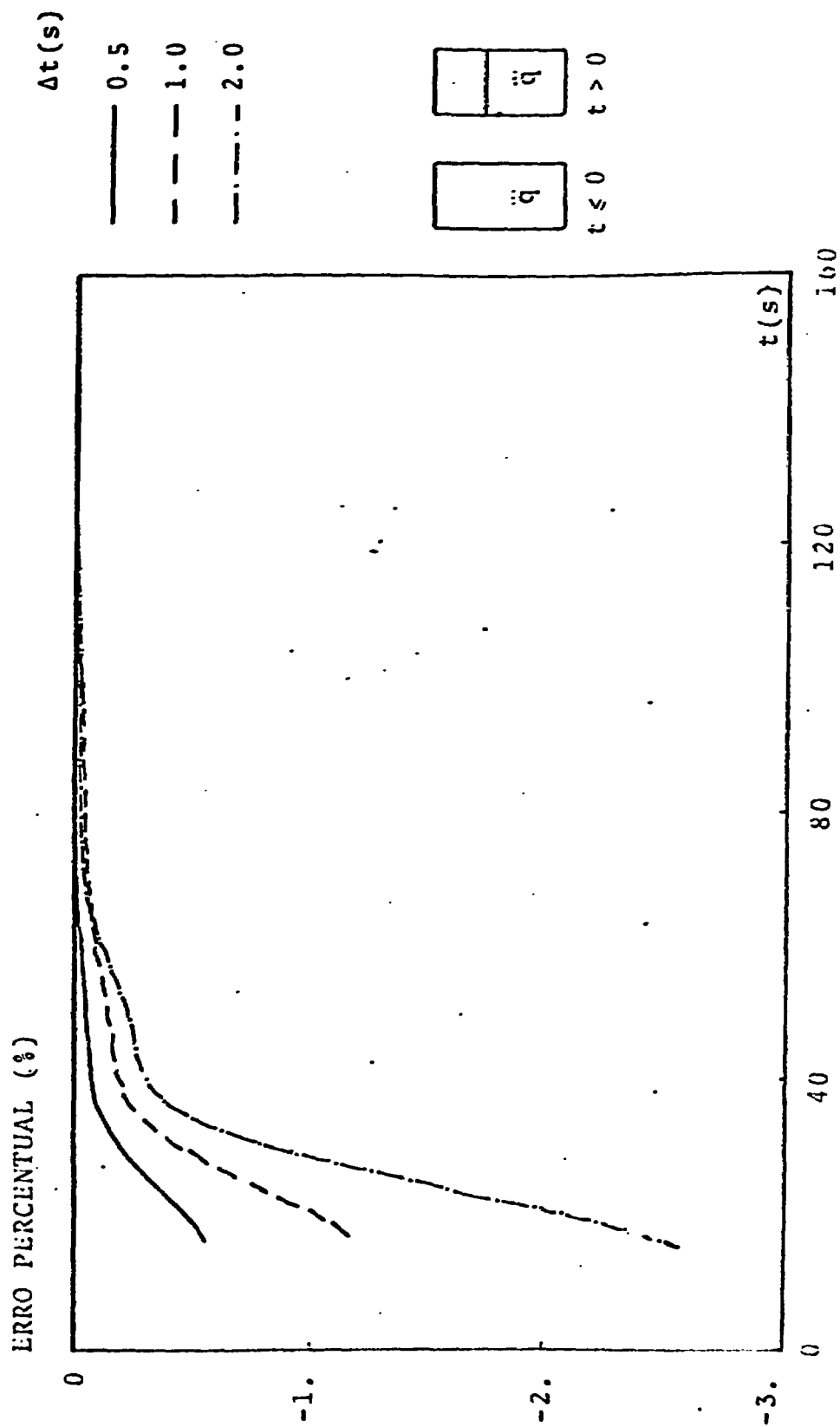


Figura 12 : Erro do método ADI-HOPSCOTCH, teste da fonte em degrau.

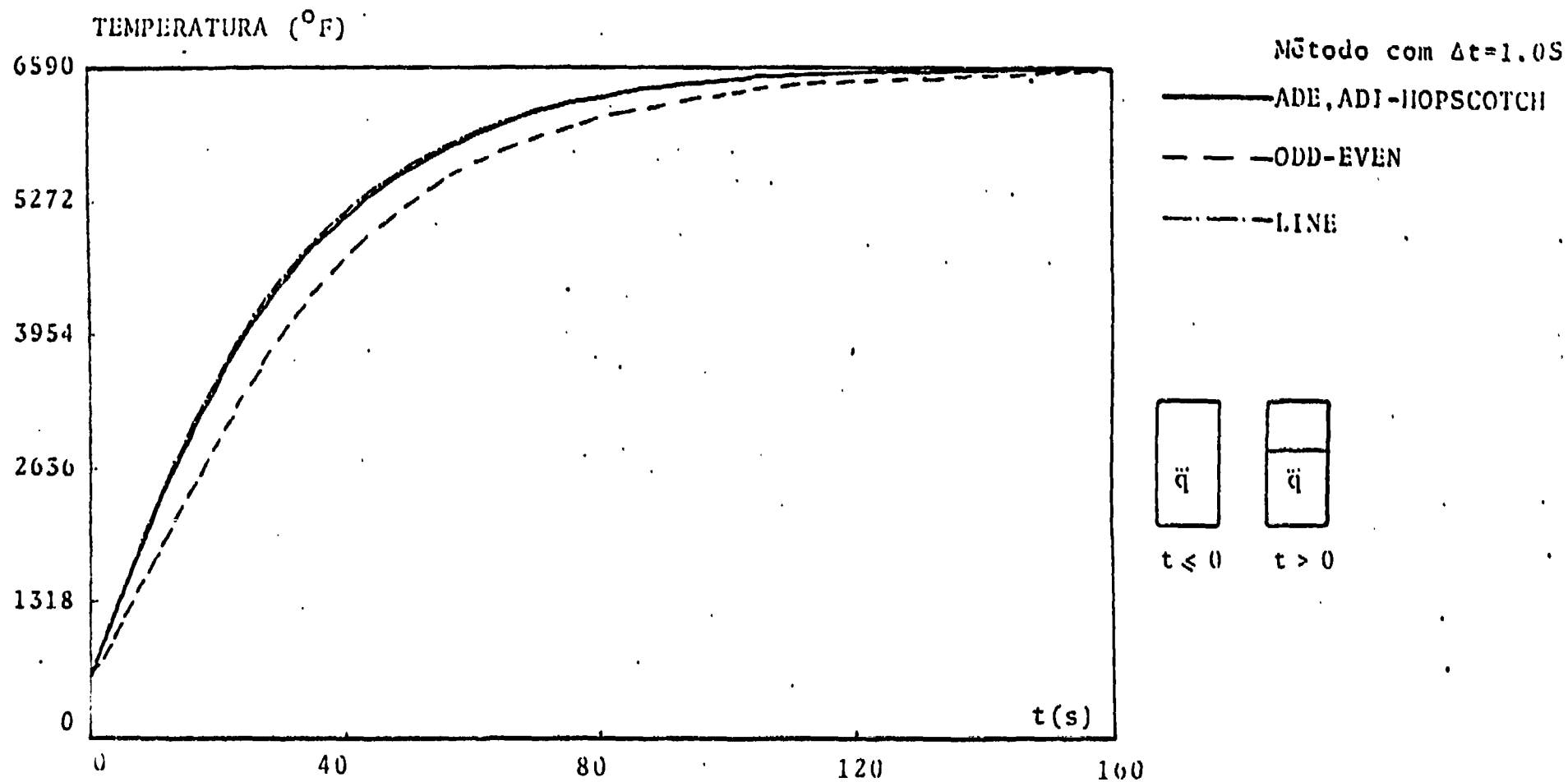


Figura 13 : Variação da temperatura com o tempo, teste da fonte em degrau.

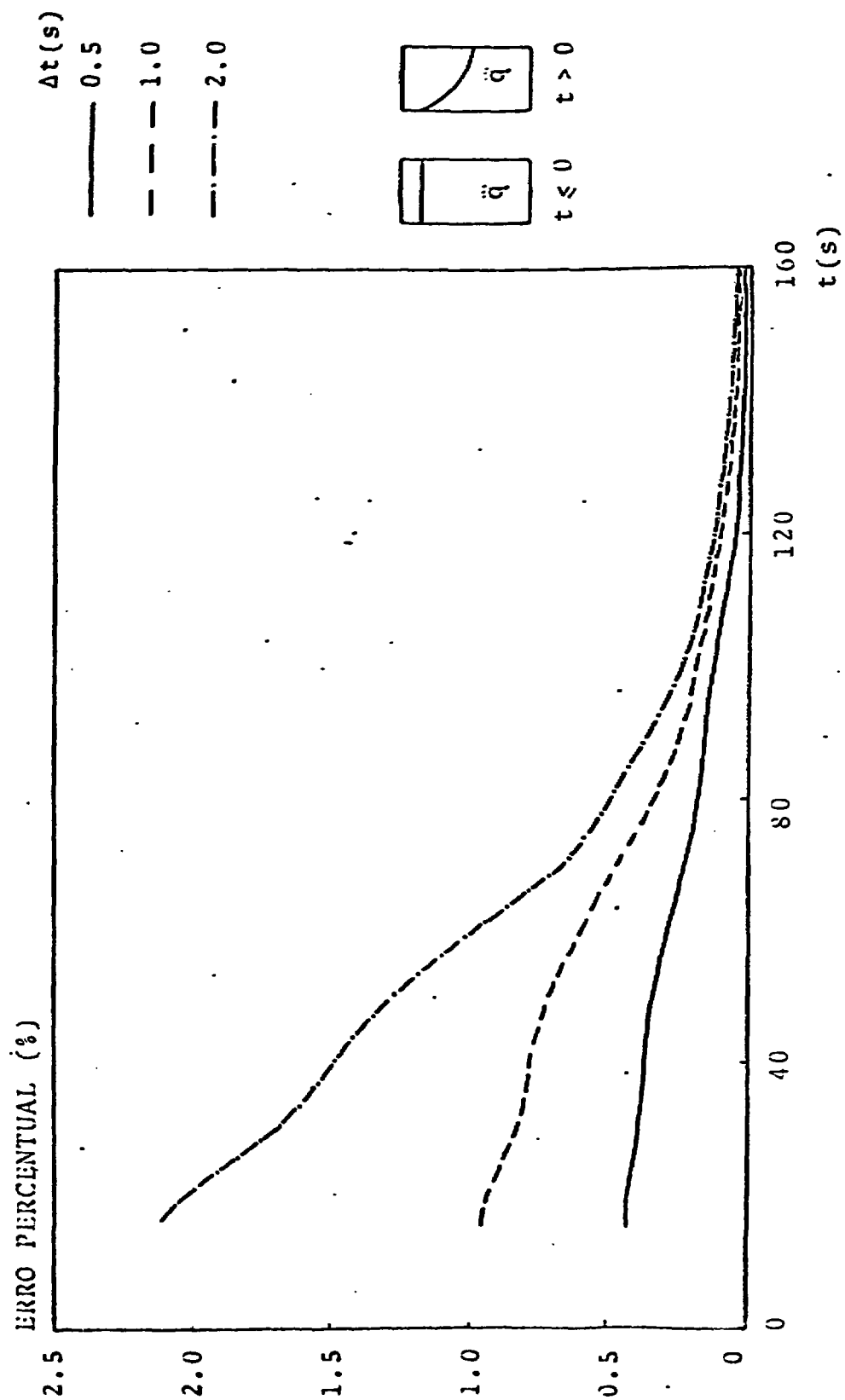


Figura 14.: Erro do método ODD-EVEN, fonte em decaimento.

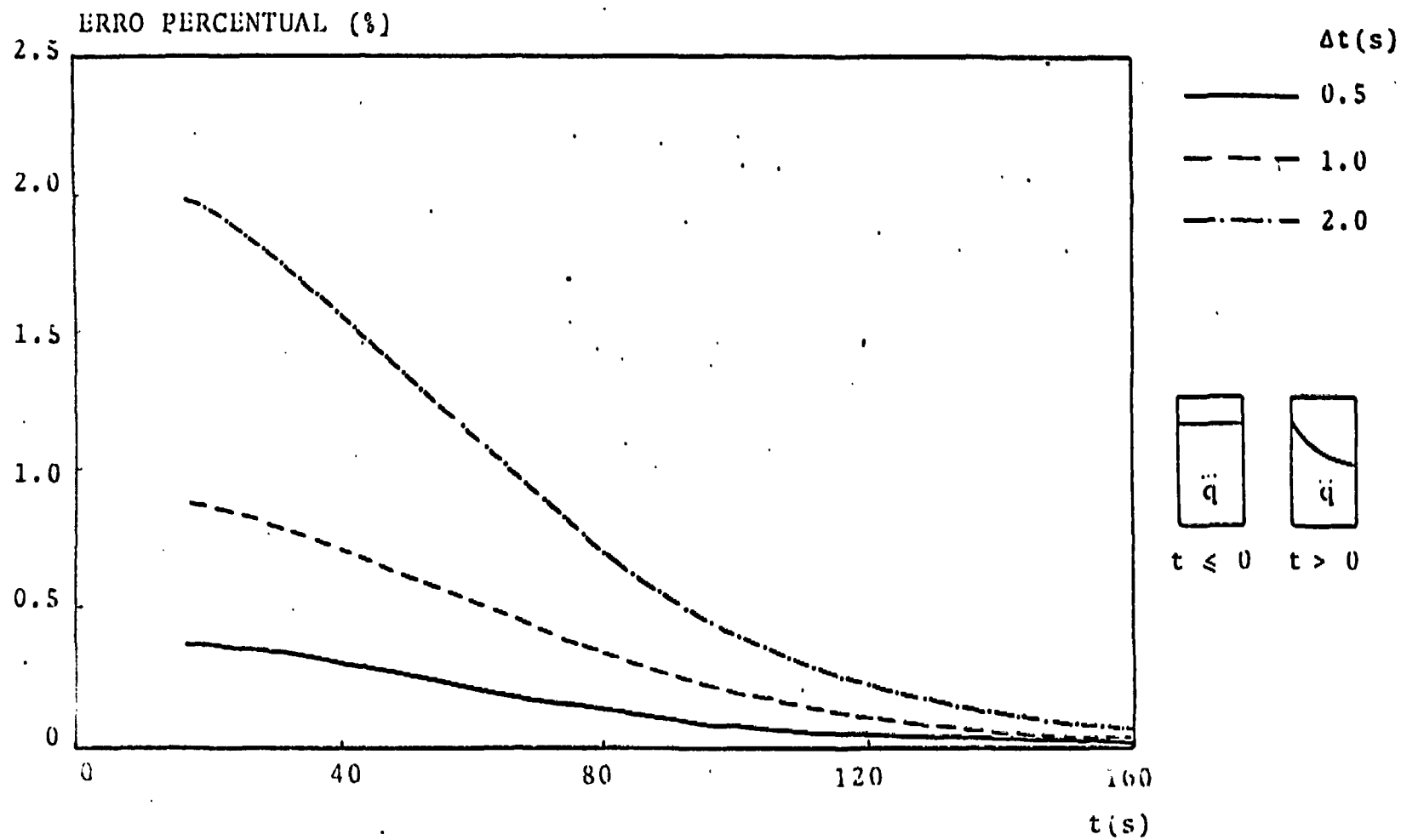


Figura 15 : Erro do método ADI-HOPSCOTCH, fonte em decaimento.

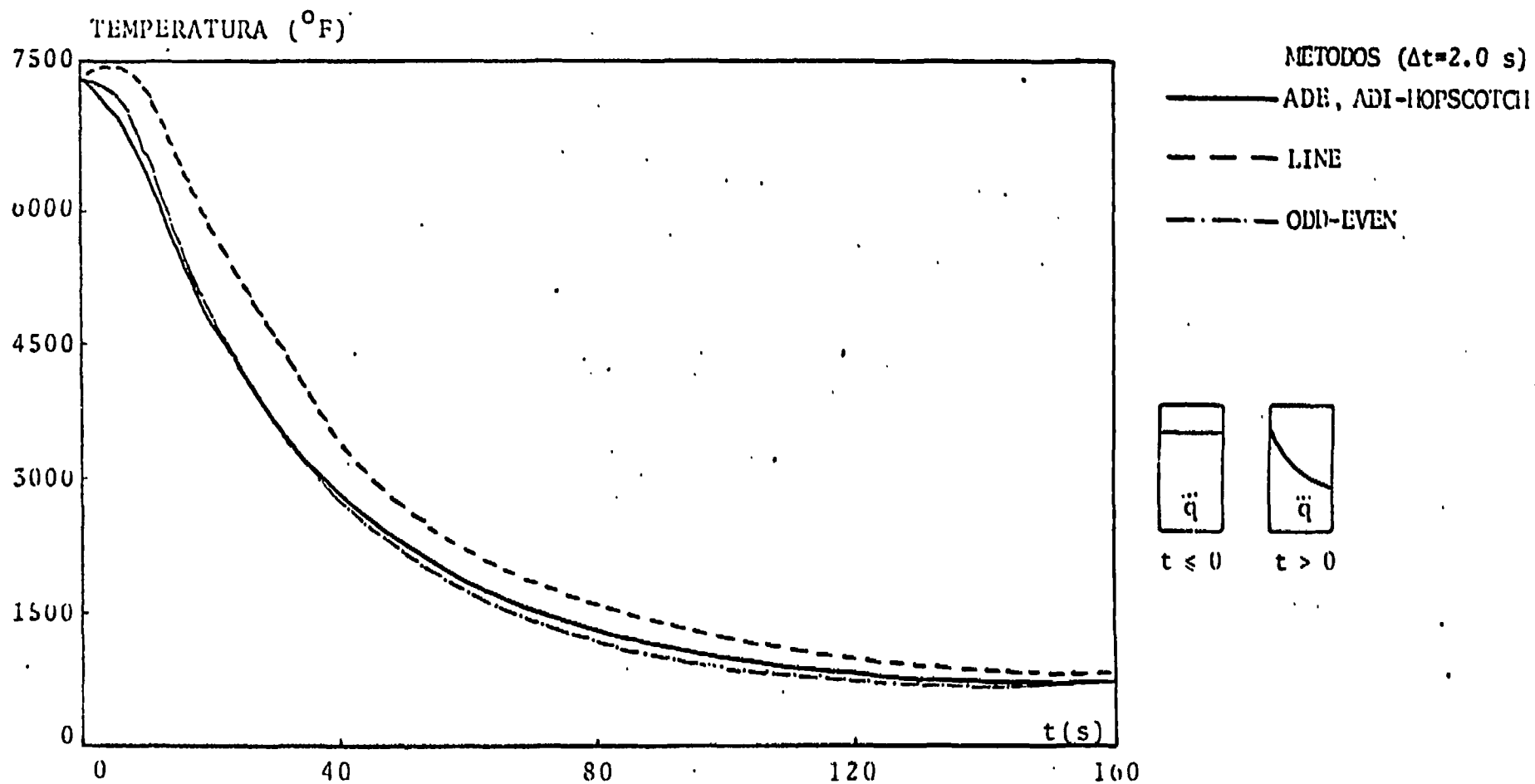


Figura 16 : Variação de temperatura com o tempo, fonte em decaimento.

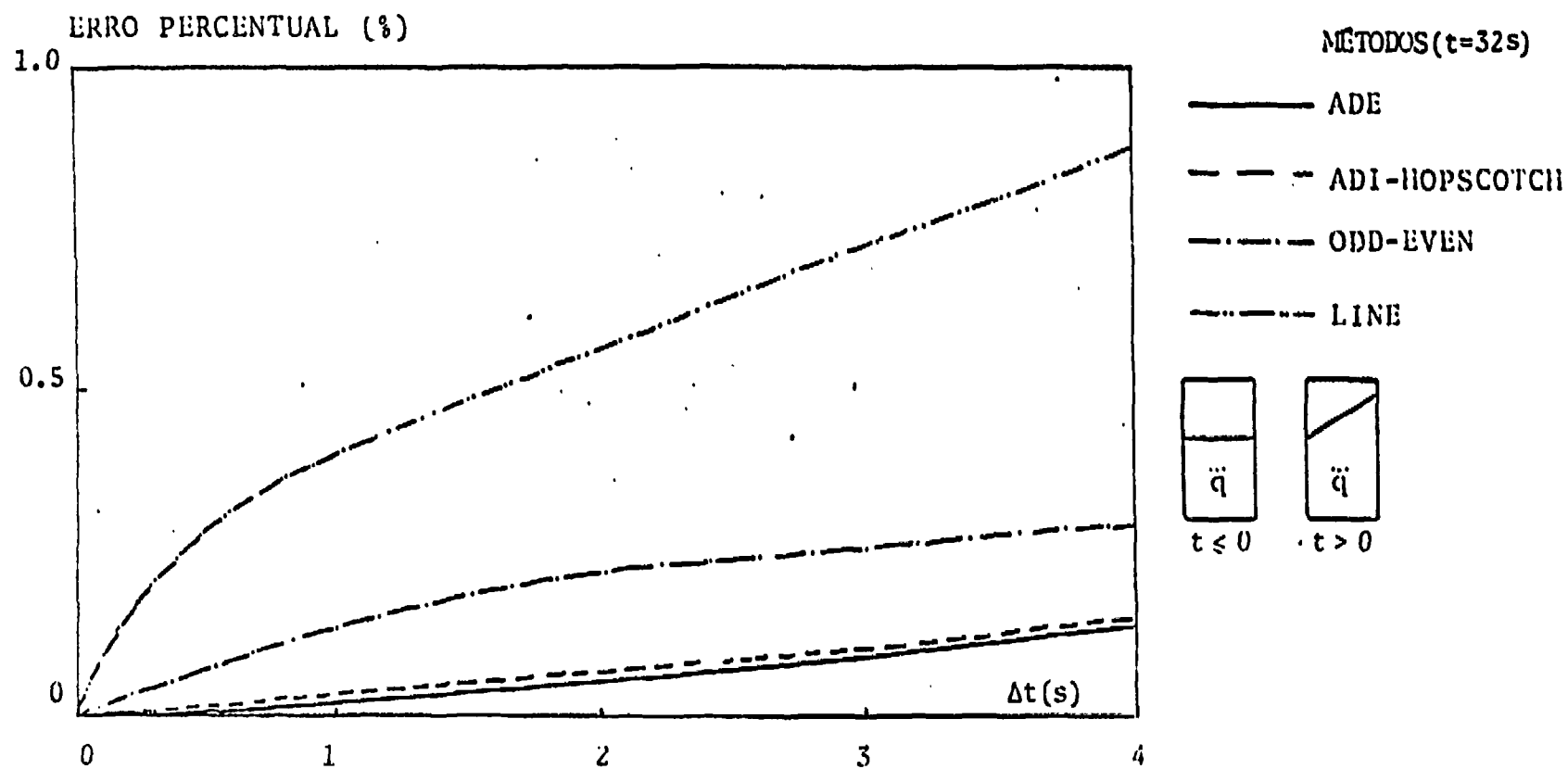


Figura 17 : Convergência dos métodos Hopscotch.



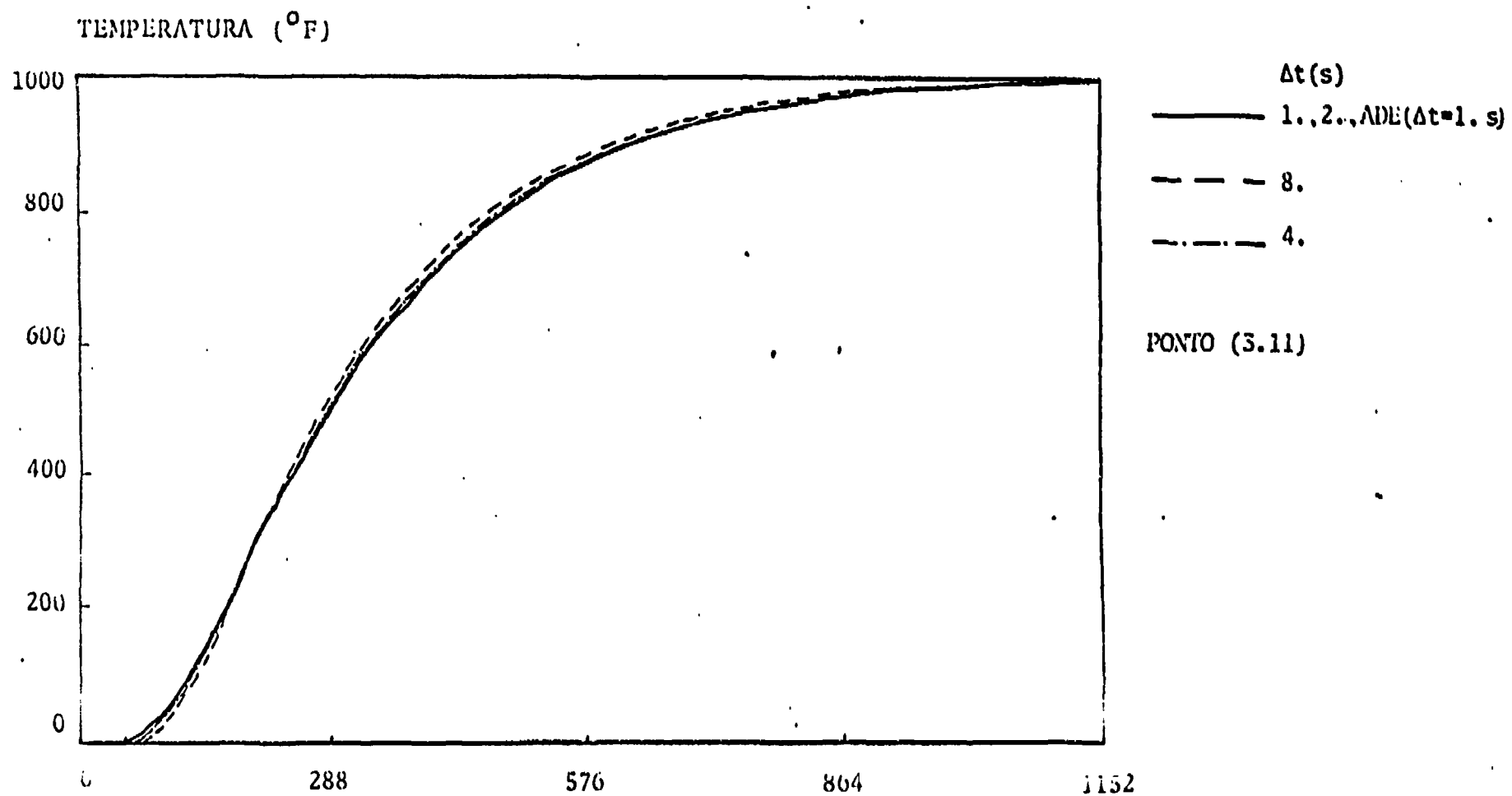


Figura 18 : Variação da temperatura com o tempo, método ODD-EVEN, teste do cilindro.

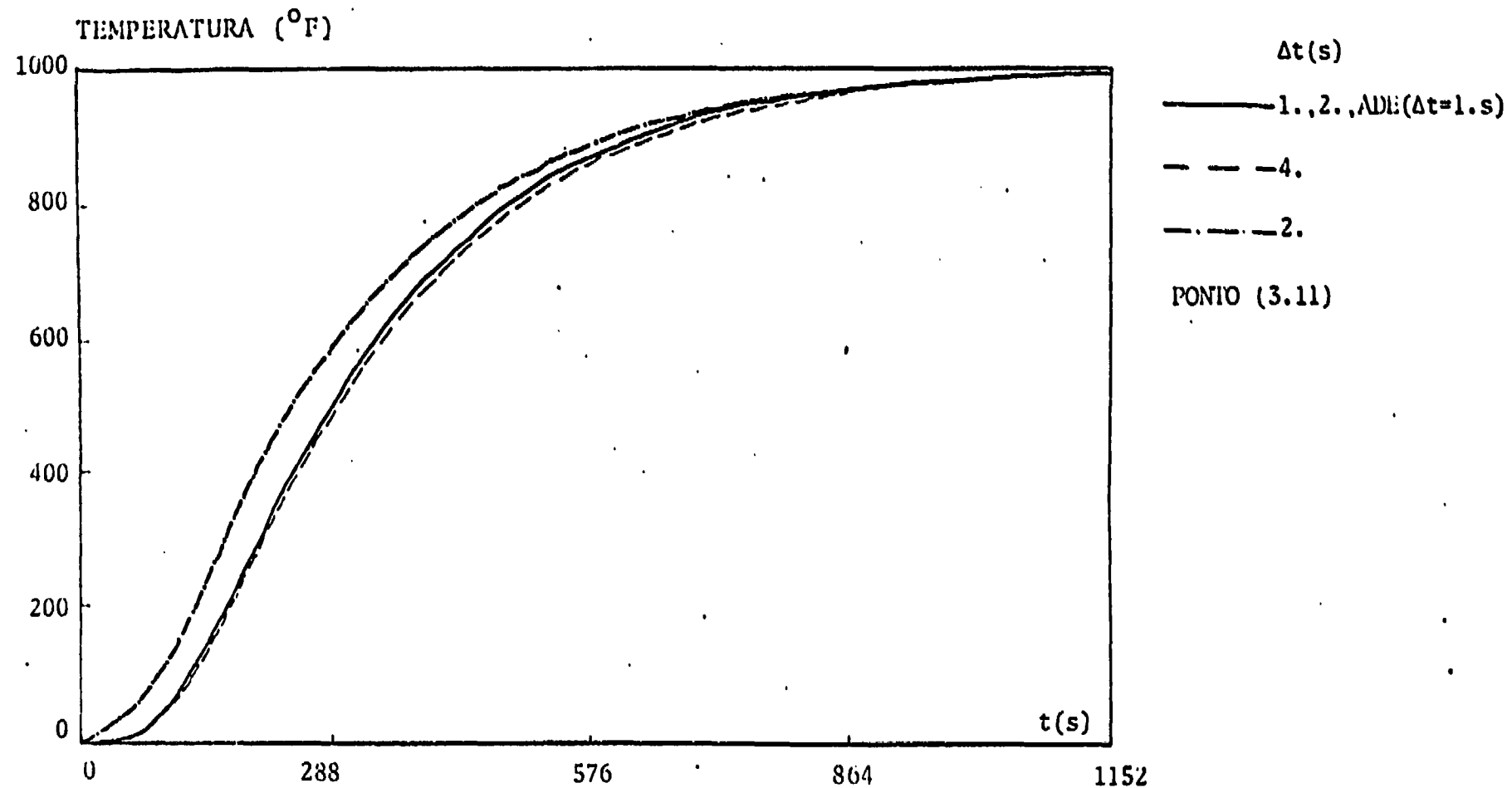


Figura 19 : Variação da temperatura com o tempo método LINE, teste do cilíndrico.

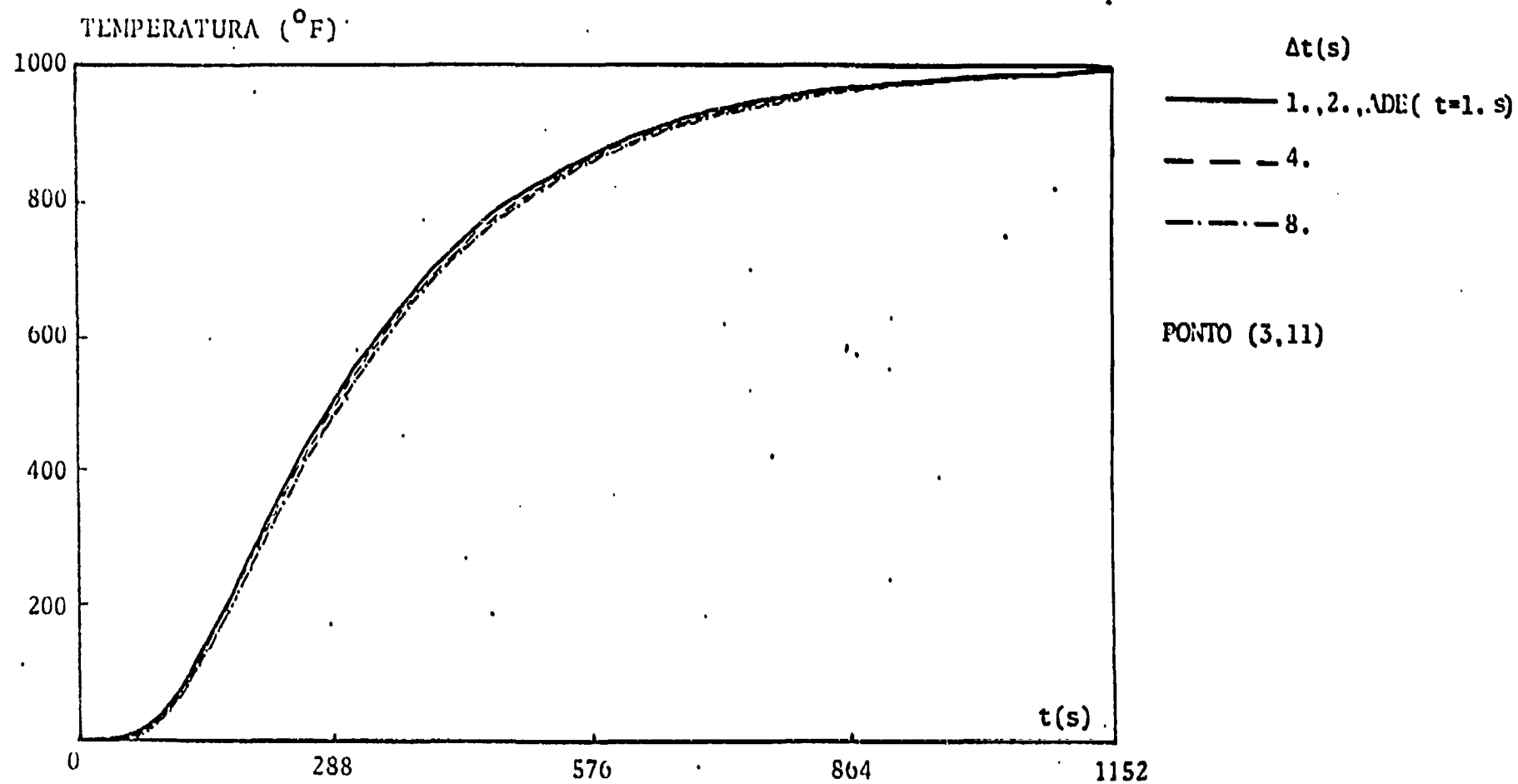


Figura 20 : Variação da temperatura com o tempo método ADI-HOPSCOTCH, teste do cilindro.

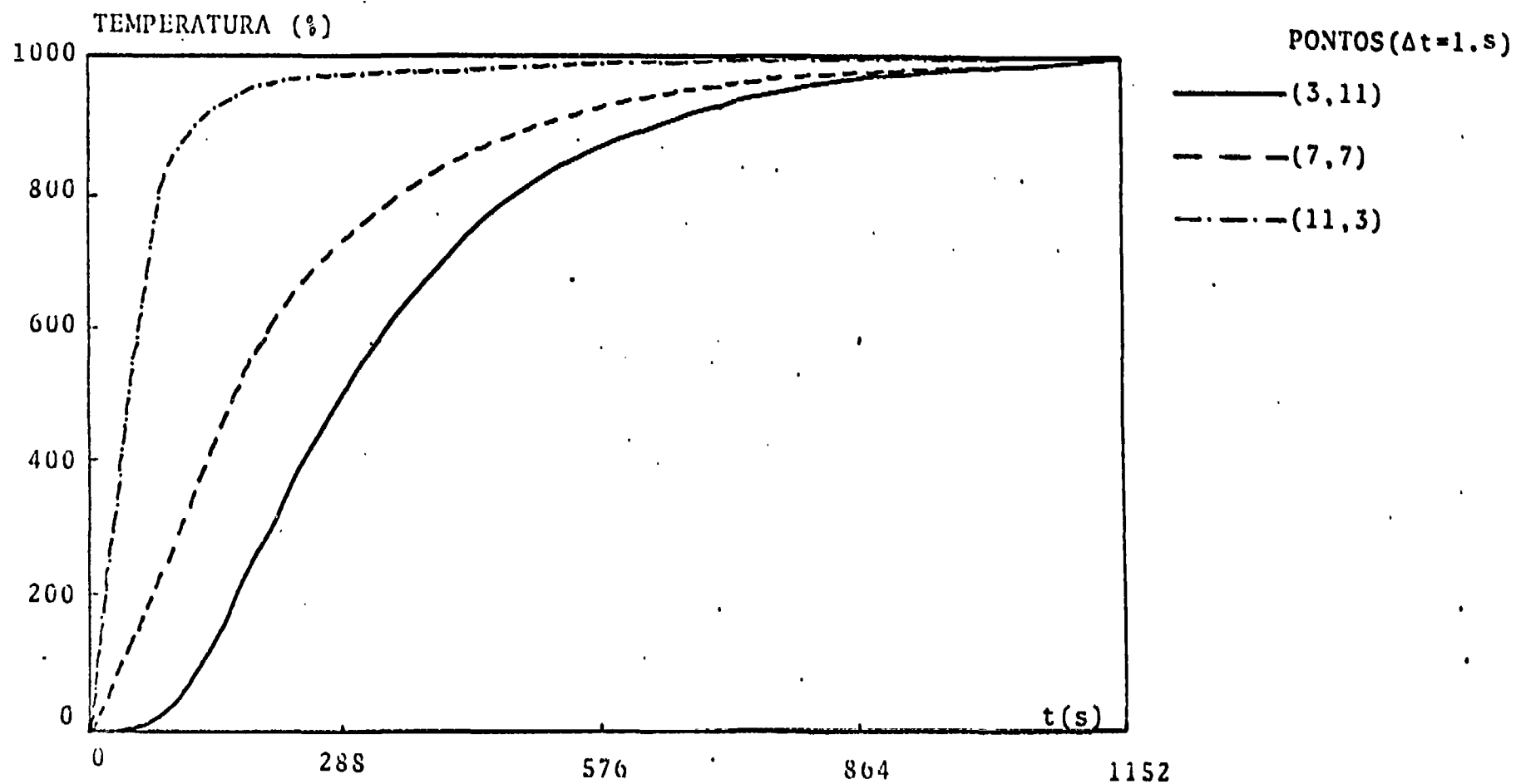


Figura 21 : Variação da temperatura com o tempo, método ADE, em vários pontos, teste do cilindro.

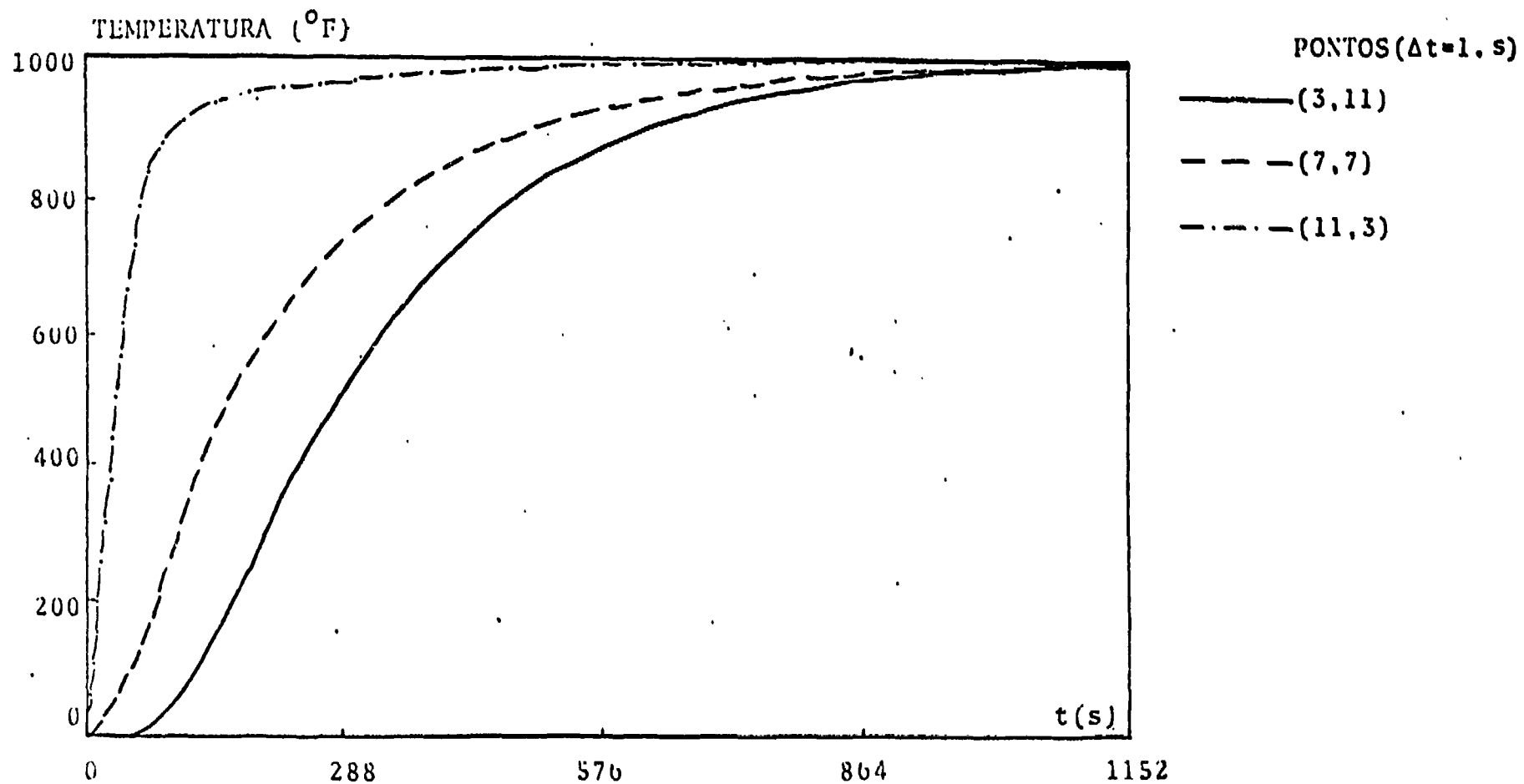


Figura 22 : Variação da temperatura com o tempo, método ODD-EVEN, em vários pontos, teste do cilindro.

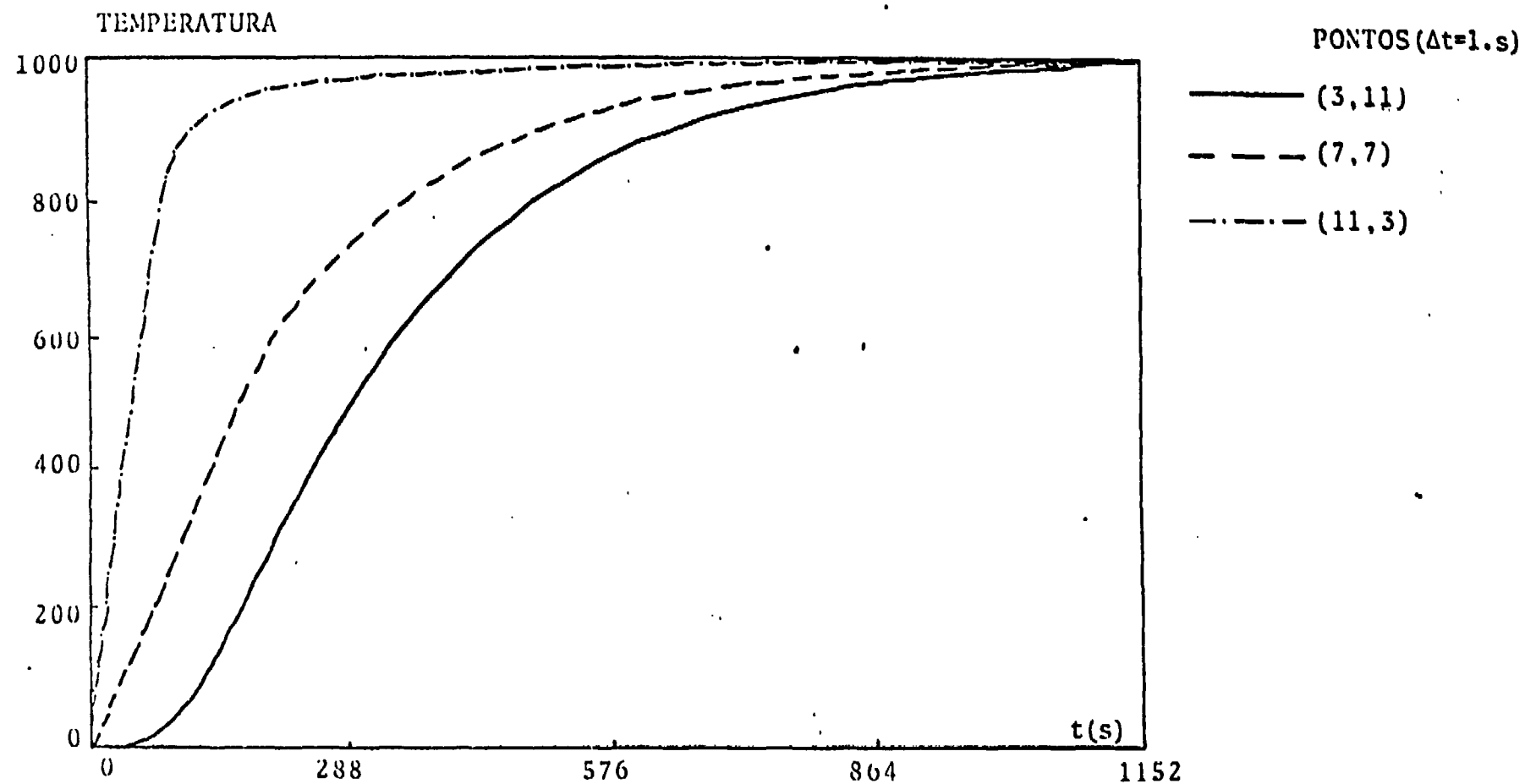


Figura 23 : Variação da temperatura com o tempo, método LINE, em vários pontos, teste do cilindro.

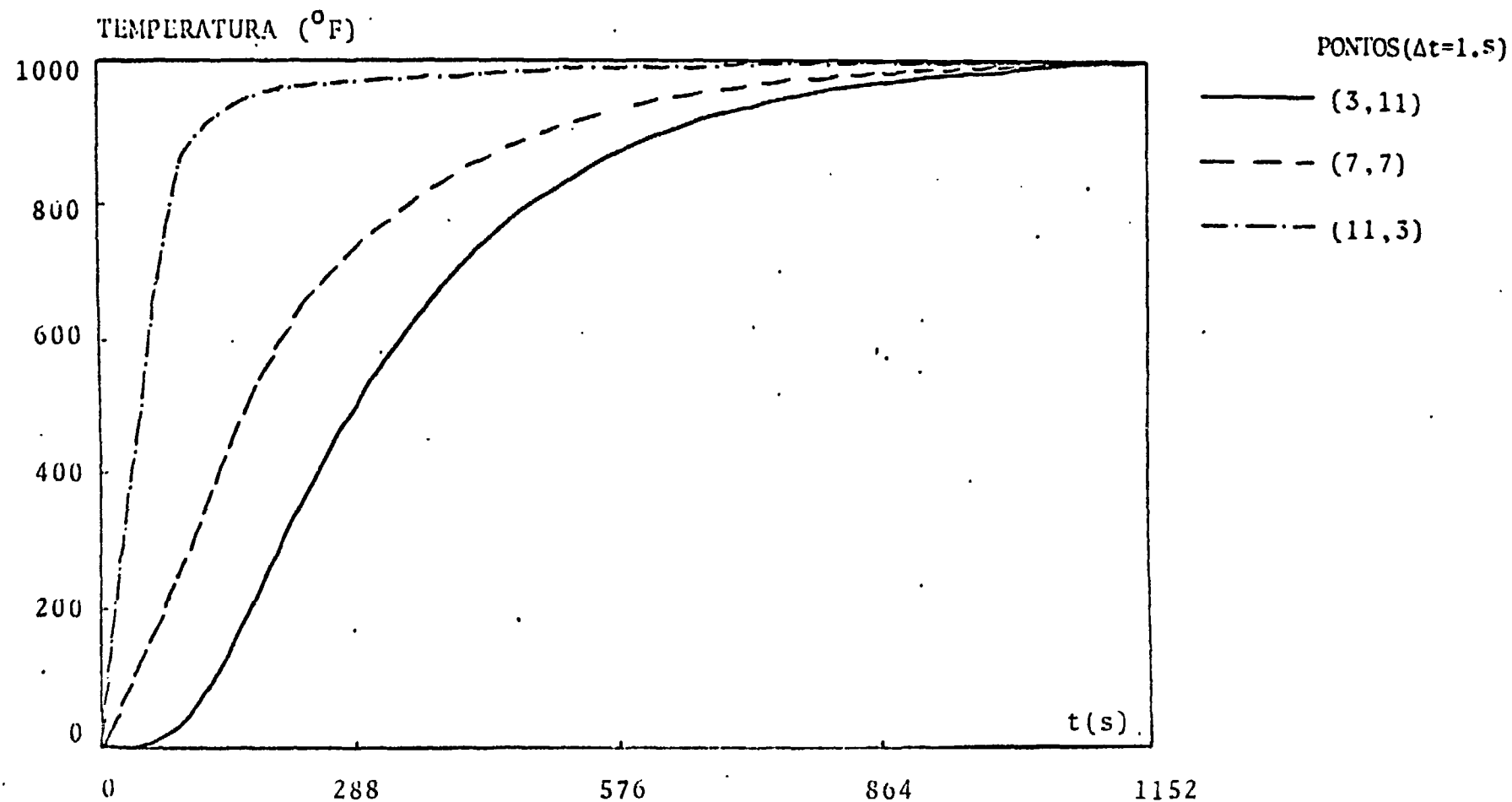


Figura 24 : Variação da temperatura com o tempo, método ADI-HOPSCOTCH, em vários pontos, teste do cilindro.

## APÊNDICE A

### CONCEITOS DE CONVERGÊNCIA, ESTABILIDADE E CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA

Seja a equações diferencial

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \hat{H} G , \quad (76)$$

onde, por simplicidade, desprezou-se o termo de fonte e  $\hat{H}$  representa um operador associado com o operador difusão.

Após a discretização de (76), num espaço bi-dimensional , tem-se

$$\frac{dG}{dt} = AG , \quad (77)$$

com A representando o operador  $\hat{H}$  discretizado espacialmente.

A discretização temporal de (77) de maneira geral conduziria à equações do tipo

$$B_1 G^{n+1} = B_2 G^n \quad (78)$$

onde  $B_1 = B_1(\Delta t, \Delta X_1, \Delta X_2)$  e  $B_2 = B_2(\Delta t, \Delta X_1, \Delta X_2)$ .



De (78) tem-se

$$G^{n+1} = B_1^{-1} B_2 G^n \quad (79)$$

Supondo que  $\Delta X_1 = g_1'(\Delta t)$  e  $\Delta X_2 = g_2(\Delta t)$ , de tal forma que  $\Delta X_i \rightarrow 0$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , fazendo  $B_1^{-1} B_2 = C(\Delta t)$  em (79), tem-se

$$G^{n+1} = C(\Delta t) G^n \quad (80)$$

É fácil mostrar que a solução de (76) é da forma

$$G(t) = E(t) G(0) \quad (81)$$

Supondo agora que  $G^0 = G(0)$  em (85), após  $n$  vezes tem-se:

$$G^n = C(\Delta t)^n G(0) \quad (82)$$

Dessa forma o erro que se comete ao representar a solução da equação (76) por (80) é dado por

$$\epsilon = G^n - G(t). \quad (83)$$

Espera-se que para um tempo  $t$  qualquer, à medida em que  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $|\epsilon| \rightarrow 0$ , ou seja,

$$\| C(\Delta t)^n G(0) - E(t) G(0) \| \rightarrow 0. \quad (84)$$

Um esquema que obedeça a equação (84) é dito convergente<sup>7</sup>.

Deixe agora  $t \rightarrow \infty$ , isto é, n aumentar indefinidamente, fixando  $\Delta t$ . Espera-se que para uma dada solução inicial  $G(0)$ , o operador  $C(\Delta t)^n$  seja contornado, de maneiras que  $C(t)^n G(0)$  seja limitado. Isso implica que  $\|\epsilon\|$  seja limitado. Dessa forma o esquema (79) é dito estável<sup>7</sup>. Se  $C(\Delta t)^n$  não for contornado, o esquema (79) será instável.

A razão  $(G^{n+1} - G^n)/\Delta t$  foi tomado em (78) para derivada temporal em (77). Utilizando-se a eq. (80), a razão acima é equivalente a  $[C(\Delta t)G - \bar{G}] / \Delta t$ , que é uma aproximação para  $AG$ . Uma aproximação que obedeça a equação

$$\left\| \frac{C(\Delta t)G - G}{\Delta t} - AG \right\| \rightarrow 0, \text{ qdo } \Delta t \rightarrow 0 \quad (85)$$

é dita "Aproximação Consiste". A equação (85) é chamada "Condição de Consistente"<sup>7</sup>.

## APENDICE B

### DESCRIÇÃO DO MÉTODO ADI

Utilizando a suposição de problema bidimensional no ta-se que a matriz A será do tipo pentadiagonal, com suas diagonais associadas com a difusão em cada direção da ma lha. A matriz A é partida como

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}}$$

No método ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT ou ADI<sup>1,2,3,4,11</sup>, conforme o nome, procura-se partir a matriz A de tal forma que num dado intervalo de tempo, o operador difusão numa direção seja tomado implicitamente, enquanto a difusão na outra direção é tomada explicitamente, sendo que no ponto genérico (i,j) teremos parte implícita a parte explícita. No outro intervalo de tempo as direções são traçadas e o algoritmo vai avançado no tempo de forma alternada. O método parte a matriz A como

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_2 \quad (86)$$

e

$$\underline{\underline{A}}_1 = \underline{\underline{L}}_1 + \frac{1}{2} \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}}_1 \quad (87)$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \underline{\underline{L}}_2 + \frac{1}{2} \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}}_2 \quad (88)$$

onde

$$\underline{\underline{L}}_1 + \underline{\underline{L}}_2 = \underline{\underline{L}}$$

$$\underline{\underline{U}}_1 + \underline{\underline{U}}_2 = \underline{\underline{U}}$$

com os índices 1 e 2 significando que as matrizes contêm partes relativas às direções 1 e 2 respectivamente. Dessa forma o algoritmo ADI fica

$$\frac{\underline{\underline{G}}^{n+1} - \underline{\underline{G}}^n}{\Delta t} = \underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{G}}^n + \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} + \underline{\underline{S}}^n \quad (89)$$

$$\frac{\underline{\underline{G}}^{n+2} - \underline{\underline{G}}^{n+1}}{\Delta t} = \underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{G}}^{n+2} + \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{G}}^{n+1} + \underline{\underline{S}}^{n+2} \quad (90)$$

ou ainda

$$[\underline{\underline{I}} - \Delta t \underline{\underline{A}}_2] \underline{\underline{G}}^{n+1} = [\underline{\underline{I}} + \Delta t \underline{\underline{A}}_1] \underline{\underline{G}}^n + \Delta t \underline{\underline{S}}^n \quad (91)$$

$$[\underline{\underline{I}} - \Delta t \underline{\underline{A}}_1] \underline{\underline{G}}^{n+2} = [\underline{\underline{I}} + \Delta t \underline{\underline{A}}_2] \underline{\underline{G}}^{n+1} + \Delta t \underline{\underline{S}}^{n+2} \quad (92)$$

As aproximações (89) e (90) são precisas até termo da ordem de  $\Delta t$ . Diversas análises sobre convergência e estabilidade dos métodos ADI<sup>1,2,3,11</sup> mostraram serem os mesmos estáveis para qualquer  $\Delta t$ . Para invertermos as matrizes do lado esquerdo de (91) e (92), basta fatorarmos as



fazendo

$$\underline{Q} \underline{G}^{n+1} = \underline{Z} \quad (96)$$

teremos

$$\underline{P} \underline{Z} = \underline{Y}$$

Como o vetor  $\underline{Y}$  é conhecido, e de acordo com a forma da matriz  $\underline{P}$ , multiplicando a matriz  $\underline{P}$  pelo vetor  $\underline{Z}$ , linha a linha, a partir da primeira linha, obteremos o elemento  $z_1$ . Fazendo o mesmo para a segunda linha, teremos  $z_2$ . No final todo o vetor  $\underline{Z}$  estará determinado. Substituindo  $\underline{Z}$  em (96) e multiplicando a matriz  $\underline{Q}$  pelo vetor  $\underline{G}^{n+1}$  de baixo para cima, como anteriormente, obtem-se  $G_l^{n+1}$ ,  $G_{l-1}^{n+1}$  ...  $G_1^{n+1}$  de tal forma que todo vetor  $\underline{G}^{n+1}$  fique conhecido. Ao trocar-se a direção o algoritmo é mantido, somente os elementos de  $\underline{P}$  e  $\underline{Q}$  são recalculados. Numa direção, esses cálculos são realizados para cada linha, isto é, se temos uma malha de  $N_1$  pontos por  $N_2$  pontos e a inversão aqui é realizada na direção contendo  $N_2$  pontos, então nesse intervalo de tempo teremos invertido  $N_1$  linhas. No intervalo de tempo seguinte a situação é trocada e daí as  $N_2$  linhas são invertidas. Além do mais vale ressaltar que os zeros das matrizes não participam dos cálculos como nos métodos clássicos.

## APÊNDICE C

### DESCRIÇÃO DO MÉTODO ADE

Uma partição da matriz  $\underline{\underline{A}}$  devido a Larkin<sup>5</sup> é

$$\underline{\underline{A}}_1 = \underline{\underline{L}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{D}} \quad (97)$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}} \quad (98)$$

onde  $\underline{\underline{L}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$  e  $\underline{\underline{U}}$  já foram definidas anteriormente e as matrizes  $\underline{\underline{A}}_1$  e  $\underline{\underline{A}}_2$  são da forma

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{array}{|c|} \hline \diagup \quad \diagdown \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array}$$

Com as partições (97) e (98), Larkin<sup>5</sup> propôs o seguinte algoritmo para resolver a equação (14).

$$\frac{\underline{G}^{n+1} - \underline{G}^n}{\Delta t} = \underline{\underline{A}}_1 \underline{G}^n + \underline{\underline{A}}_2 \underline{G}^{n+1} + \underline{S}^n, \quad (99)$$

$$\frac{\underline{G}^{n+2} - \underline{G}^{n+1}}{\Delta t} = \underline{A}_1 \underline{G}^{n+2} + \underline{A}_2 \underline{G}^{n+1} + \underline{S}^{n+2}, \quad (100)$$

ou ainda

$$[\underline{I} - \Delta t \underline{A}_2] \underline{G}^{n+1} = [\underline{I} + \Delta t \underline{A}_1] \underline{G}^n + \Delta t \underline{S}^n, \quad (101)$$

$$[\underline{I} - \Delta t \underline{A}_1] \underline{G}^{n+2} = [\underline{I} + \Delta t \underline{A}_2] \underline{G}^{n+1} + \Delta t \underline{S}^{n+2}, \quad (102)$$

O algoritmo anterior é chamado comumente "ALTERNATING DIRECTION EXPLICIT" ou ADE<sup>4,5,6,14</sup>.

Observe que o vetor  $\underline{G}^{n+1}$  em (101) fica facilmente determinado a partir da multiplicação da matriz  $\underline{I} - \Delta t \underline{A}_2$  por  $\underline{G}^{n+1}$  linha a linha, notando que o lado direito de (101) fica conhecido a partir dos valores antigos de  $\underline{G}$ . Dessa forma a primeira linha em (51) fornece  $G_1^{n+1}$ , a segunda linha relaciona  $G_1^{n+1}$  e  $G_2^{n+1}$ . Todavia,  $G_1^{n+1}$  já foi calculado e dessa forma computamos  $G_2^{n+1}$ . Utilizando esse procedimento na equação (102), obteremos todo o vetor  $\underline{G}^{n+1}$ . Agora com o vetor  $\underline{G}^{n+1}$  conhecido, substituindo-o e repetindo o procedimento anterior, no sentido do último elemento de  $\underline{G}^{n+2}$  para o primeiro, obtem-se o vetor  $\underline{G}^{n+2}$ . No próximo incremento, volta-se à situação inicial, avançando no tempo. Vale notar que, pela descrição do método, os algoritmos (101) e (102) são extremamente rápidos em relação ao método ADI, visto anteriormente, além de serem fáceis de programar.



## APENDICE D

### DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR

#### D.1 - Discretização no Interior do Cilindro

Tomando a malha da Figura 1 e aproximando a equação (60) por diferenças finita no entorno do ponto (i,j) teremos

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j} = \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_{i,j} + \ddot{q}_{i,j} \quad (103)$$

Porém

$$\frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} = \frac{K}{r_i} \left( \frac{r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i+1/2,j} - r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i-1/2,j}}{\Delta r} \right). \quad (104)$$

Por outro lado

$$r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i+1/2,j} = r_{i+1/2} \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta r} \quad (105)$$

e

$$r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i-1/2,j} = r_{i-1/2} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta r} \quad (106)$$

Agora substituindo (105) e (106) em (104) e notando que  $r_{i-1/2} = r_i - \Delta r/2$  ,  $r_{i+1/2} = r_i + \Delta r/2$ , após rearranjo fica

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{i,j} = \frac{k}{\Delta r^2} \left[ (1 - \Delta r / 2r_i) T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + (1 + \Delta r / 2r_i) T_{i+1,j} \right]. \quad (107)$$

Da mesma forma poderemos fazer

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_{i,j} = \frac{\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j+1/2} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j-1/2}}{\Delta z}, \quad (108)$$

mas

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j+1/2} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta z} \quad (109)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j-1/2} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z} \quad (110)$$

Substituindo (109) e (110) em (108), após simplificações, teremos

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2} (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}) \quad (111)$$

Notando ainda que

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j} = \rho c \frac{dT_{i,j}}{dt}, \quad (112)$$

substituindo as equações (112), (107) e (111) na equação

(103) teremos :

$$\rho c \frac{d T_{i,j}}{dt} = \frac{K}{\Delta r^2} \left[ (1 - \Delta r/2r_i) T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + (1 + \Delta r/2r_i) T_{i+1,j} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta z^2} (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}) + \dot{q} \quad (115)$$

ou ainda

$$\frac{d T_{i,j}}{dt} = \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} (1/2 - \Delta r/4r_i) T_{i-1,j} - \frac{2K}{\rho c} (1/\Delta r^2 + 1/\Delta z^2) T_{i,j} +$$

$$+ \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} (1/2 + \Delta r/4r_i) T_{i+1,j} + \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{i,j-1} + \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{i,j+1} +$$

$$+ \frac{q_{i,j}}{\rho c} \quad (114)$$

Fazendo

$$\alpha_{i-1,j} = \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} (1/2 - \Delta r/4r_i) \quad (115)$$

$$\alpha_{i+1,j} = \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} (1/2 + \Delta r/4r_i) \quad (116)$$

$$\alpha_{i,j} = \frac{2K}{\rho c} (1/\Delta r^2 + 1/\Delta z^2) \quad (117)$$

$$\alpha_{i,j-1} = \alpha_{i,j+1} = \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} \quad (118)$$

$$s_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{\rho c} \quad (119)$$

Dessa forma substituindo as equações (115), (116), (117) , (118) e (119) na equação (114) fica

$$\begin{aligned} \frac{dT_{i,j}}{dt} = & \alpha_{i-1,j} T_{i-1,j} + \alpha_{i,j} T_{i,j} + \alpha_{i+1,j} T_{i+1,j} + \\ & + \alpha_{i,j-1} T_{i,j-1} + \alpha_{i,j+1} T_{i,j+1} + s_{i,j} , \quad i \neq 0. \end{aligned} \quad (120)$$

Devido ao primeiro termo do lado direito da equação (103), a discretização anterior é válida para pontos da va reta fora do centro, já que no centro, isto é em  $r = 0$  , a equação fica indeterminada. Por outro lado

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} ,$$

dessa forma

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} , \quad (121)$$

mas

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}}{\frac{\partial}{\partial r} (r) \Big|_{r=0}} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} . \quad (122)$$

Substituindo (122) em (121), teremos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} .$$

Logo, quando  $r = 0$  teremos

$$\rho c \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{0,j} = 2K \left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{0,j} + K \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{0,j} + \ddot{\alpha}_{0,j}, \quad (123)$$

mas

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{0,j} = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{1/2,j} - \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{-1/2,j}}{\Delta r} \quad (124)$$

Por outro lado, devido à simetria axial

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{-1/2,j} = - \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{1/2,j} \quad (125)$$

de maneira que substituindo (125) em (124) fica

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{0,j} = \frac{2}{\Delta r} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{1/2,j} \quad (126)$$

mas

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{1/2,j} = \frac{T_{1,j} - T_{0,j}}{\Delta r}$$

Daí (126) fica

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{0,j} = \frac{2}{\Delta r^2} (T_{1,j} - T_{0,j}).$$

Os outros termos de (123) são manipulados como no caso em que  $r \neq 0$ , bastando trocar  $i$  por  $0$ . Dessa forma a equação

(123) fica :

$$\begin{aligned} \frac{dT_{0,j}}{dt} = & 4 \frac{K}{\Delta r^2} (T_{1,j} - T_{0,j}) + \frac{K}{\Delta z^2} (T_{0,j-1} - 2 T_{0,j} + \\ & + T_{0,j+1}) + q_{0,j} \end{aligned} \quad (128)$$

ou, rearranjando :

$$\begin{aligned} \frac{dT_{0,j}}{dt} = & - 2 \frac{K}{\rho c} \left( \frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) T_{0,j} + 4 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} T_{1,j} + \\ & + \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{0,j-1} + \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{0,j+1} + \frac{\ddot{q}_{0,j}}{\rho c} \end{aligned} \quad (129)$$

Fazendo

$$\alpha_{0,j} = 2 \frac{K}{\rho c} (2/\Delta r^2 + 1/\Delta z^2) \quad (130)$$

$$\alpha_{1,j} = 4 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} \quad (131)$$

$$\alpha_{0,j-1} = \alpha_{0,j+1} = \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} \quad (132)$$

$$s_{0,j} = \frac{q_{0,j}}{\rho c} \quad (133)$$

e substituindo (130), (131), (132) e (133) na equação (129) teremos :

$$\frac{dT_{0,j}}{dt} = - \alpha_{0,j} T_{0,j} + \alpha_{1,j} T_{1,j} + \alpha_{0,j-1} T_{0,j-1} +$$

$$+ \alpha_{0,j+1} T_{0,j+1} + s_{0,j} \quad (134)$$

## D.2 - Discretização dos Contronos do Cilíndro

Detalharemos a condição de contorno por convecção, uma vez que o caso de temperatura estabelecida é trivial . Dessa forma estabeleceremos equações de balanço de energia para vários volumes de controle ao longo do contorno do cilindro. A Figura 25 mostra os vários volumes de controle no contorno do cilindro.

A equação de balanço é dada por

$$E_s = E_i - E_o + E_g \quad (135)$$

onde

$E_s$  = energia armazenada no volume de controle

$E_i$  = energia entrando no volume de controle

$E_o$  = energia saindo do volume de controle

$E_g$  = energia gerada dentro do volume de controle

Por outro lado

$$E_s = \rho c V \frac{dT}{dt} \quad (136)$$

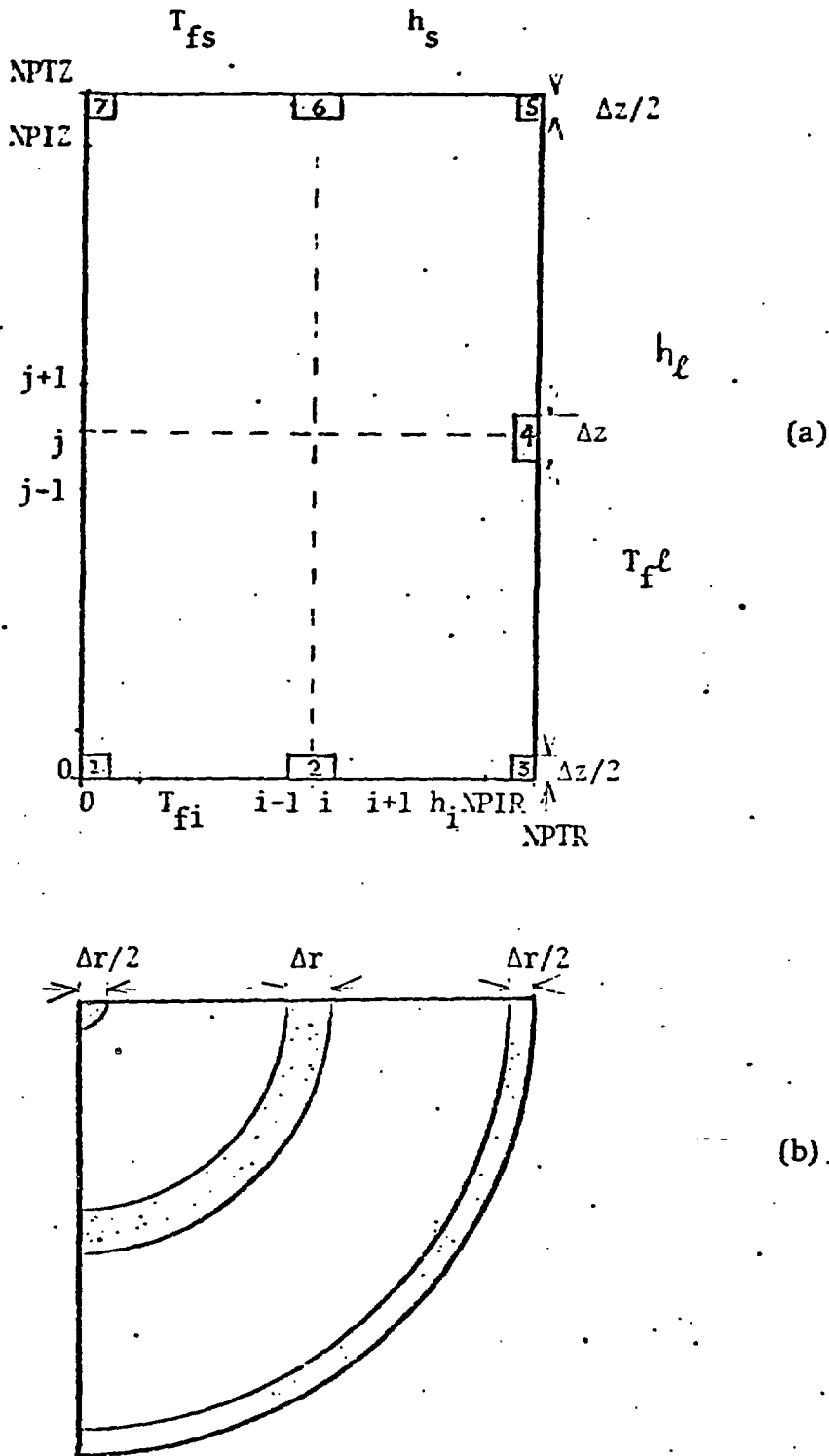


Figura 25 : Detalhes dos volumes de controles nos contornos do cilindro. Em (a) o cilindro foi cortado longitudinalmente de acordo com (b), que mostra parte de uma base do cilindro.



$$E_g = V \dot{q} \quad , \quad (137)$$

onde  $V$  é o volume de controle: Os termos  $E_i$  e  $E_o$  dependem se ocorre transferência de calor por convecção ou condução na entrada ou na saída do volume de controle. Para o cálculo da taxa de quantidade de calor transferida por convecção é usada a Lei de Newton do resfriamento

$$q = h A(T - T_f) \quad (138)$$

onde  $A$  é a área na qual está ocorrendo a transferência de calor,  $h$  é o coeficiente de transferência de calor ( $\text{cal/s. } ^\circ\text{C.m}^2$ ) e  $T_f$  é a temperatura do fluido. Já para calcular a taxa de calor transferido por condução usamos a Lei de Fourier na qual

$$q = -KA \nabla T \quad (139)$$

Na Figura 25, vemos a base do cilindro resfriado por um fluido a temperatura  $T_{fi}$  cujo coeficiente de transferência de calor é  $h_i$ . No volume de controle  $V_1$ , temos um pequeno cilindro de altura  $\Delta z/2$  e raio  $\Delta r/2$ . Dessa forma a área da superfície lateral é  $\pi \Delta r \Delta z/2$ , a área da base é  $\pi(\Delta r/2)^2$  e o volume de controle  $\pi(\Delta r/2)^2 \Delta z/2$ . O balanço de energia nesse volume é o seguinte :

$$E_s = \rho c \pi(\Delta r/2)^2 \Delta z/2 \frac{dT_{0,0}}{dt} \quad (140)$$

$$E_i = - K\pi(\Delta r/2)^2 \frac{T_{0,0} - T_{0,1}}{\Delta z} \quad (141)$$

$$E_o = - K\pi \Delta r \Delta z/2 \cdot \frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{\Delta r} + h_i \pi(\Delta r/2)^2 (T_{0,0} - T_{fi}) \quad (142)$$

$$E_g = \pi(\Delta r/2)^2 \Delta z/2 \cdot \ddot{q}_{0,0} \quad (143)$$

Substituindo as equações (140), (141), (142) e (143) na equação (135), após rearranjos teremos :

$$\begin{aligned} \frac{dT_{0,0}}{dt} = & - \frac{2K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_i/(K \cdot \Delta z) + 2/\Delta r^2) T_{0,0} + \\ & + 4 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} T_{1,0} + 2 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{0,1} + \frac{2 h_i}{\rho K \Delta z} T_{fi} + \ddot{q}_{0,0} \end{aligned} \quad (144)$$

No topo do cilindro teremos uma equação semelhante para o volume de controle  $V_7$ , sô trocando  $j = 0$  por  $j = NPTZ$ ,  $j=1$  por  $j = NPTZ$ ,  $h_i$  por  $h_s$  e  $T_{fi}$  por  $T_{fs}$ . Dessa forma teremos

$$\begin{aligned} \frac{dT_{0,NPTZ}}{dt} = & - 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_s/(K \cdot \Delta z) + 2/\Delta r^2) T_{0,NPTZ} + \\ & + 4 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} T_{1,NPTZ} + 2 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{0,NPTZ} + \\ & + \frac{2 h_s}{\rho K \Delta z} T_{fs} + \ddot{q}_{0,NPTZ} \end{aligned} \quad (145)$$

Tomando um volume de controle  $V_2$  num ponto genérico  $(i,0)$  do cilindro, conforme a Figura 25, esse volume é semelhante a um cilindro ôco de altura  $z/2$ , raio interno  $r_i - \Delta r/2$  e raio externo  $r_i + \Delta r/2$ . Dessa forma a área lateral interna é dado por  $2\pi r_i(1 - \Delta r/2r_i)\Delta z/2$ , a área lateral externa por  $2\pi r_i(1 + \Delta r/2r_i)\Delta z/2$ , a área da base por  $2\pi r_i \Delta r$  e o volume por  $2\pi r_i \Delta r \Delta z/2$ . Aplicando o balanço de energia nesse volume :

$$E_s = \rho c 2\pi r_i \Delta r \Delta z/2 \cdot \frac{dT_{i,0}}{dt} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} E_i = & - K 2\pi r_i \Delta r \frac{T_{i,0} - T_{i,1}}{\Delta z} - \\ & - K 2\pi r_i (1 - \Delta r/2r_i) \frac{T_{i,0} - T_{i-1,0}}{\Delta r} \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} E_o = & - K 2\pi r_i (1 + \Delta r/2r_i) \frac{T_{i+1,0} - T_{i,0}}{\Delta r} + \\ & + h_i 2\pi r_i \Delta r (T_{i,0} - T_{fi}) \end{aligned} \quad (148)$$

$$E_g = 2\pi r_i \Delta r \Delta z/2 \cdot \ddot{q}_{i,0} \quad (149)$$

Substituindo (146), (147), (148) e (149) na equação (135), após simplificações, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dT_{i,0}}{dt} = & - \frac{2K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_i/(K \cdot \Delta z) + 1/\Delta r^2) T_{i,0} + \\ & + D_1 T_{i-1,0} + D_2 T_{i+1,0} + \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{i,1} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2h_i}{\rho \cdot K \Delta z} T_{fi} + q_{i,0} \quad (150)$$

onde

$$D_1 = \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} (1 - \Delta r/2r_i) \quad (151)$$

$$D_2 = \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} (1 + \Delta r/2r_i) \quad (152)$$

Para se obter a discretização no topo da vareta basta fazer as modificações feitas para o volume no topo central . Dessa forma, tem-se :

$$\begin{aligned} \frac{dT_{i,NPTZ}}{dt} = & - 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_s/(K \cdot \Delta z) + 1/\Delta r^2) T_{i,NPTZ} + \\ & + D_1 T_{i-1,NPTZ} + D_2 T_{i+1,NPT} + \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{i,NPTZ} + \\ & + \frac{2 h_s}{\rho K \Delta z} T_{fs} + \frac{\ddot{q}}{c} T_{i,NPTZ} . \end{aligned} \quad (153)$$

No volume  $V_3$  da Figura 25, temos que considerar o volume sujeito a dois fluídos,  $h_i$  e  $h_t$  e suas respectivas temperaturas. De acordo com a Figura, o cilindro ôco possui altura  $\Delta z/2$ , raio interno  $R - \Delta r/2$  e raio externo  $R$ . Dessa forma a área lateral interna é dada por  $2\pi R(1-\Delta r/2R)\Delta z/2$ , área externa  $2\pi R \Delta z/2$ , área da base  $\pi R \Delta r(1-\Delta r/4R)$  e volume  $\pi R \Delta r(1-\Delta r/4R)\Delta z/2$ . Utilizando os procedimentos usados anteriormente obtem-se as equações para as temperaturas na base e no topo da lateral do cilindro, ou seja :

$$\begin{aligned}
\frac{dT_{NPTR,0}}{dt} = & - 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_l/(K \cdot \Delta r \cdot y) + h_i/(K \cdot \Delta z) + \\
& + x/y \cdot \Delta r^2) T_{NPTR,0} + 2 \frac{K}{\rho c} \frac{x}{y \cdot \Delta r^2} T_{NPIR,0} + \\
& + 2 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{NPTR,1} + \frac{2 h_l}{\rho \cdot K \cdot \Delta r \cdot y} T_{f l} + \\
& + \frac{2 h_i}{\rho \cdot K \cdot \Delta z} T_{f i} + \frac{\ddot{q}_{NPTR,0}}{\rho c}
\end{aligned} \tag{154}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{dT_{NPTR,NPTZ}}{dt} = & - 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_l/(K \cdot \Delta r \cdot y) + \\
& + h_s/(K \cdot \Delta z) + x/y \cdot \Delta r^2) T_{NPTR,NPTZ} + \\
& + \frac{2K}{\rho c} \frac{x}{y \cdot \Delta r^2} T_{NPIR,NPTZ} + \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{NPTR,NPTZ} + \\
& + \frac{2 h_l}{\rho \cdot K \cdot \Delta r \cdot y} T_{f l} + \frac{2 h_s}{\rho \cdot K \cdot \Delta z} T_{f s} + \frac{\ddot{q}_{NPTR,NPTZ}}{\rho c}
\end{aligned} \tag{155}$$

onde

$$x = 1 - \Delta r/2R \tag{156}$$

$$y = 1 - \Delta r/4R \tag{157}$$

A discretização para os volumes  $V_4$  da Figura é feito da mesma forma quanto para os volumes de controle lateral. Dessa forma é fácil mostrar que a discretização dos volumes de controle  $V_4$  é dado por :

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_{NPTR,j}}{dt} = & - 2 \frac{k}{\rho c} (1/\Delta z^2) + h_\ell / (K \cdot \Delta r \cdot y) + \\
 & + x/y \cdot \Delta r^2) T_{NPTR,j} + 2 \frac{K}{\rho c} \frac{x}{y \cdot \Delta r^2} T_{NPIR,j} + \\
 & + \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{NPTR,j-1} + \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} T_{NPTR,j+1} + \\
 & + \frac{2 h_\ell}{\rho \cdot K \cdot \Delta r} T_f + \frac{\ddot{q}_{NPTR,j}}{\rho c} .
 \end{aligned} \tag{158}$$

Definindo as constantes abaixo como

$$\alpha_{0,0} = 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_i / (K \cdot \Delta z) + 2/\Delta r^2) , \tag{159}$$

$$\alpha_{1,0} = 4 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} , \tag{160}$$

$$\alpha_{0,1} = 2 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} , \tag{161}$$

$$\alpha_{0,NPTZ} = 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_s / (K \cdot \Delta z) + 2/\Delta r^2) , \tag{162}$$

$$\alpha_{1,NPTZ} = \frac{4K}{\rho c} \frac{1}{\Delta r^2} , \tag{163}$$

$$\alpha_{0,NPIZ} = \frac{2K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} , \tag{164}$$

$$\alpha_{i,0} = \frac{2K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_i/(K \cdot \Delta z) + 1/\Delta r^2) , \quad (165)$$

$$\alpha_{i-1,0} = D_1 , \quad (166)$$

$$\alpha_{i+1,0} = D_2 , \quad (167)$$

$$\alpha_{i,1} = 2 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} \quad (168)$$

$$\alpha_{i,NPTZ} = 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h_s/(K \cdot \Delta g) + 1/\Delta r^2) , \quad (169)$$

$$\alpha_{i-1,NPTZ} = D_1 , \quad (170)$$

$$\alpha_{i+1,NPTZ} = D_2 , \quad (171)$$

$$\alpha_{i,NPIZ} = 2 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{NPTR,0} = 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h\ell/(K \cdot \Delta r \cdot y) + \\ + h_i/(K \cdot \Delta z) + x/y \Delta r^2) \end{aligned} \quad (173)$$

$$\alpha_{NPIR,0} = \frac{2K}{\rho c} \frac{x}{y \cdot \Delta r^2} \quad (174)$$

$$\alpha_{NPTR,1} = 2 \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} , \quad (175)$$

$$\alpha_{NPTR,j} = 2 \frac{K}{\rho c} (1/\Delta z^2 + h\ell/K \cdot \Delta r) + x/y \cdot \Delta r^2) , \quad (176)$$

$$\alpha_{NPTR,j} = 2 \frac{K}{\rho c} \frac{x}{y \cdot \Delta r^2} , \quad (177)$$

$$\alpha_{NPTR,j-1} = \alpha_{NPTR,j+1} = \frac{K}{\rho c} \frac{1}{\Delta z^2} , \quad (178)$$

$$s = \frac{\ddot{q}_{i,j}}{\rho c} \bigvee_{i,j} , \quad (179)$$

$$cc_i = \frac{2 h_i}{\rho \cdot K \cdot s z} , \quad (180)$$

$$cc_e = \frac{2 h_e}{\rho \cdot K \cdot s z} , \quad (181)$$

$$cc_s = \frac{2 h_s}{\rho \cdot K \cdot \Delta r \cdot y} \quad (182)$$

e substituindo essas constantes nas respectivas equações ,  
tem-se :

$$\frac{dT_{0,0}}{dt} = - \alpha_{0,0} T_{0,0} + \alpha_{1,0} T_{1,0} + \alpha_{0,1} T_{0,1} + cc_i T_{fi} + s , \quad (183)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{0,NPTZ}}{dt} = & - \alpha_{0,NPTZ} T_{0,NPTZ} + \alpha_{1,NPTZ} T_{1,NPTZ} + \\ & + \alpha_{0,NPIE} T_{0,NPIE} + cc_s T_{fs} + s , \end{aligned} \quad (184)$$

$$\frac{dT_{i,0}}{dt} = - \alpha_{i,0} T_{i,0} + \alpha_{i-1,0} T_{i-1,0} + \alpha_{i+1,0} T_{i+1,0} +$$



$$+ \alpha_{i,1} T_{i,1} + cc_i T_{fi} + s, \quad (185)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{i,NPTZ}}{dt} = & - \alpha_{i,NPTZ} T_{i,NPTZ} + \alpha_{i-1,NPTZ} T_{i-1,NPTZ} + \\ & + \alpha_{i+1,NPTZ} T_{i+1,NPTZ} + \alpha_{i,NPIZ} T_{i,NPIZ} + \\ & + cc_s T_{fs} + s, \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{NPTR,0}}{dt} = & - \alpha_{NPTR,0} T_{NPTR,0} + \alpha_{NPIR,0} T_{NPIR,0} + \\ & + \alpha_{NPTR,1} T_{NPTR,1} + cc_i T_{fi} + cc_\ell T_{f\ell} + s, \end{aligned} \quad (187)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{NPTR,j}}{dt} = & - \alpha_{NPTR,j} T_{NPTR,j} + \alpha_{NPIR,j} T_{NPIR,j} + \\ & + \alpha_{NPTR,j-1} T_{NPTR,j-1} + \alpha_{NPTR,j+1} T_{NPTR,j+1} + \\ & + cc_\ell T_{f\ell}, \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{NPTR,NPTZ}}{dt} = & - \alpha_{NPTR,NPTZ} T_{NPTR,NPTZ} + \\ & + \alpha_{NPIR,NPTZ} T_{NPIR,NPTZ} + \\ & + \alpha_{NPTR,NPIZ} T_{NPTR,NPIZ} + cc_s T_{fs} + cc_\ell T_{f\ell} + s. \end{aligned} \quad (189)$$

Logo, o sistema de equações diferenciais acima, junto com as equações (120) e (134), representam a discretização es pacial das equações de condução de calor do cilindro.

## APÊNDICE E

### SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR

A solução estacionária da equação (14) é obtida fazendo.

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{S}} = 0 \quad (190)$$

Na resolução da equação (190), o método de eliminação de Gauss<sup>1,2,3,12</sup> é o processo usual para se inverter a matriz A. Entretanto o método é extremamente lento, face às operações algébricas envolvidas e torna necessário armazenar toda a matriz. Num problema onde espaço de memória é um fator limitante, somado à letidão do método, torna o processo de eliminação de Gauss impraticável. Já os métodos iterativos não requerem inversão de matriz, além de precisar de menos espaço de memória na computação. Sua vantagem reside no fato de ter-se que iterar  $p+1$  vezes até que tenhamos uma solução  $\underline{\underline{G}}^{p+1}$  tão próxima de  $\underline{\underline{G}}^p$  quanto desejamos. Contudo com a escolha conveniente do algoritmo de iteração, a velocidade de convergência pode ser aumentada. O método de Gauss - Seidel<sup>2,5</sup> possui um algoritmo de iteração que torna bastante rápida a convergência. Pela forma da matriz A, podemos fatorá-la como :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}} \quad (191)$$

onde as matrizes  $\underline{\underline{L}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$  e  $\underline{\underline{U}}$  são da forma

$$\underline{\underline{L}} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}; \quad \underline{\underline{D}} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}; \quad \underline{\underline{U}} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix},$$

ou seja,  $\underline{\underline{L}}$  é estritamente triangular inferior,  $\underline{\underline{U}}$  é estritamente triangular superior e  $\underline{\underline{D}}$  é uma matriz diagonal.

O método de Gauss - Seidel consiste em fazer

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}} = (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}}) \underline{\underline{G}}^{P+1} + \underline{\underline{U}} \underline{\underline{G}}^P, \quad (192)$$

dessa forma, substituindo a equação (192) na equação (190) teremos

$$(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}}) \underline{\underline{G}}^{P+1} + \underline{\underline{U}} \underline{\underline{G}}^P + \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{0}}, \quad (193)$$

A partir de uma solução tentativa  $\underline{\underline{G}}^0$ , deveremos iterar (193) até que

$$\frac{G_{i,j}^{P+1} - G_{i,j}^P}{G_{i,j}^P} \leq \epsilon \quad (194)$$

onde  $\epsilon$  é escolhido tão pequeno quanto queiramos.

Para uma componente genérica  $(i,j)$  do vetor  $\underline{\underline{G}}$ , temos

$$\begin{aligned}
 G_{i,j}^{P+1} &= \beta_{i-1,j} G_{i-1,j}^{P+1} + \beta_{i,j-1} G_{i,j-1}^{P+1} + \\
 &+ \beta_{i+1,j} G_{i+1,j}^P + \beta_{i,j+1} G_{i,j+1}^P + S_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{195}$$

Observe que do ponto de vista de programação estamos sempre utilizando os valores mais recentes, dessa forma os índices  $p$  e  $p + 1$  podem ser omitidos.

Fazendo uma modificação na equação (195) do tipo

$$\begin{aligned}
 G_{i,j}^{P+1} &= W. [\beta_{i-1,j} G_{i-1,j}^{P+1} + \beta_{i,j-1} G_{i,j-1}^{P+1} + \\
 &+ \beta_{i+1,j} G_{i+1,j}^P + \beta_{i,j+1} G_{i,j+1}^P + S'_{i,j}] + (1-W)G_{i,j}^P,
 \end{aligned}
 \tag{196}$$

e com  $W$  escolhido entre 1 e 2 fará com que a convergência seja aumentada, pois essa escolha de  $W$  faz com que a solução seja extrapolada além daquela dada pelo método de Gauss-Seidel o método modificado dado por (196) é citado nas literaturas como Successive Over - relaxation<sup>1,2,5</sup> ou S O R.

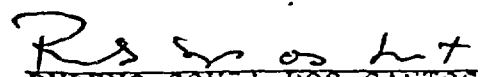
## BIBLIOGRAFIA

1. M. Necati Ozisik, Boundary Value Problems of Heat Conduction, Internacional Textbook Company, Scranton, Pennsylvania, 1968.
2. Melville Clark, Jr., Kent F. Hansen, Numerical Methods of Reactor Analysis , Academic Press , 1964.
3. Richard S. Varga, Matrix Iterative Analysis, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
4. A.L. Wight, K.F. Hansen, and D.R. Ferguson, Nucl. Sci. Eng. 44, 239, 1971.
5. B.K. Larkin, Math. Comp. 18, 86, 196, 1964.
6. Wm. H. Reed, K.F. Hansen, Nucl. Sci. Eng. 41 , 431-432 , 1970.
7. Robert D. Richtmyer and K.W. Morton, Difference Methods of Initial - Value Problems, John Wiley & Sons, New York, 1967.
8. A.R. Gourlay, J. Inst. Math. Applic., 6, 375 - 390, 1970

9. A.R. Gourlay, and G.R. McGuire, J.Inst. Math. Applic., 7, 216 - 227, 1971.
10. A.R. Gourlay, Recent Development of the Hopscotch Idea
11. Peaceman, D.W., and Rachford, H.H., The Numerical Solution Parabolic and Elliptic Differential Equations, J.Soc. Ind. Appl. Math., 3, 28, 1955.
12. Glen E. Myers, Analytical Methods In Conduction Heat Transfer, McGraw - Hill Book Company, 1971.
13. Wachspress, E.L., Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics, Prentice - Hall Inc., N.J., 1966.
14. D.R. Ferguson, K.F. Hansen, Nucl. Sci. Eng., 51, 189 - 205, 1973.
15. Gordon, P., J. Soc. Ind. Appl. Math., 13, 667, 1965.
16. Scala, S.M. and Gordon, P., Phys. Fluids 9, 1158, 1966.
17. Scala, S.M. and Gordon, P., A.I.A.A.J. 6, 815, 1968.




TESE APRESENTADA POR :

  
RUBENS SOULA DOS SANTOS

APROVADA PELOS SRS.:

  
ANTONIO CARLOS MARQUES ALVIN - Ph.D

  
ANTONIO CARLOS DE OLIVEIRA BARROSO - Ph.D.

  
DAVID ADJUTO BOTELHO - Ph.D.

  
CARLOS ALBERTO REINERT DE LIMA - M.Sc.